

Bissectrices et hauteurs d'un triangle

Niveau : 1ère Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Bissectrice
 - 1-1. Définition
 - 1-2. Propriété
 - 1-3. Bissectrice d'un triangle
- II. Hauteurs d'un triangle
 - 2-1. Définition
 - 2-2. Propriété
 - 2-3. Cas particuliers
- III. Exercices

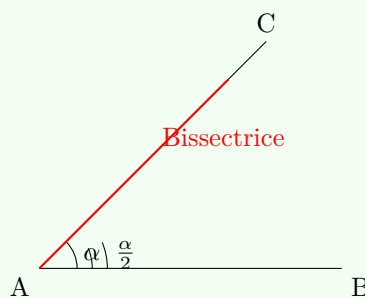
1 Bissectrice

1.1 Définition

Définition

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.

Exemple

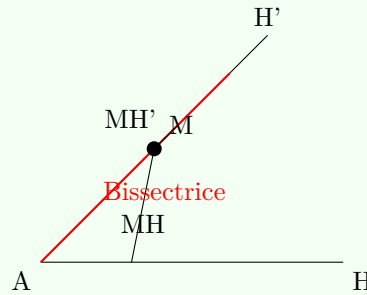


1.2 Propriété

Propriété

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

Exemple



Le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{HAH'}$, donc $MH = MH'$.

1.3 Bissectrice d'un triangle

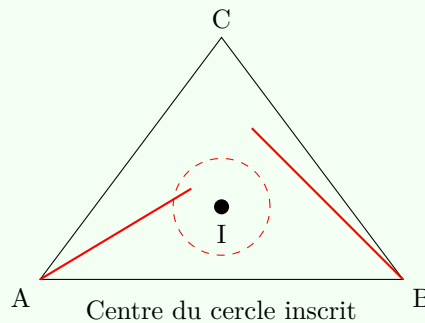
Définition et propriété

Une bissectrice d'un triangle est une bissectrice de l'un de ses angles.

Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit au triangle.

Remarque

Pour construire le centre du cercle inscrit, il suffit de tracer deux bissectrices de ce triangle.



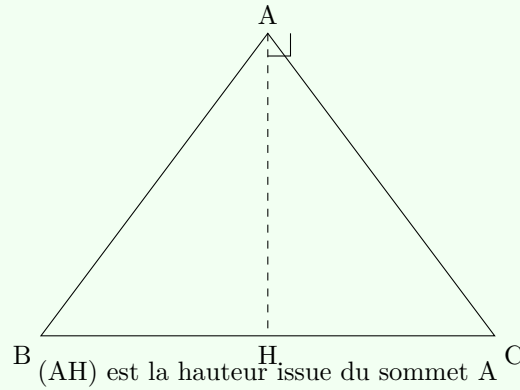
2 Hauteurs d'un triangle

2.1 Définition

Définition

La hauteur d'un triangle est la droite qui passe par l'un des sommets de ce triangle et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Exemple

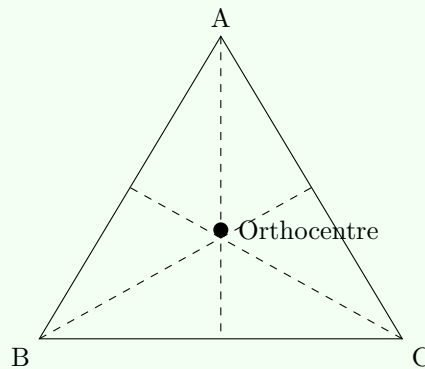


2.2 Propriété

Propriété

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un seul point appelé orthocentre de ce triangle.

Exemple



2.3 Cas particuliers

Cas particuliers

- Dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.
- Dans un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), l'orthocentre est à l'intérieur du triangle.
- Dans un triangle obtusangle (ayant un angle obtus), l'orthocentre est à l'extérieur du triangle.

3 Exercices

3.1 Exercice 1

Exercice 1

A. Dans le triangle ABC :

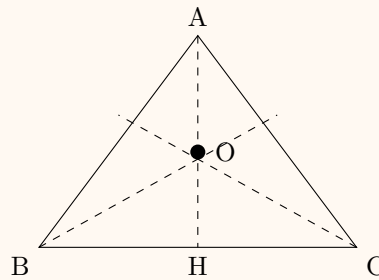
- Quelle est la hauteur issue de A ?
- Quelle est la hauteur issue de C ?
- Quel est l'orthocentre du triangle ?
- Quelle est la hauteur relative à [AC] ?

B. Dans le triangle BCH :

- Quelle est la hauteur relative à [BC] ?
- Quelle est la hauteur issue de B ?
- Quel est l'orthocentre du triangle ?
- Quelle est la hauteur relative à [BH] ?

C. Dans le triangle ABH :

- Quelle est la hauteur relative à [AB] ?
- Quelle est la hauteur relative à [AH] ?
- Quel est l'orthocentre du triangle ?
- Quelle est la hauteur relative à [BH] ?



Solution Exercice 1

A.

- Hauteur issue de A : (AH)
- Hauteur issue de C : (CO)
- Orthocentre : O
- Hauteur relative à [AC] : (BO)

B.

- Hauteur relative à [BC] : (HO)
- Hauteur issue de B : (BA)
- Orthocentre : A
- Hauteur relative à [BH] : (CO)

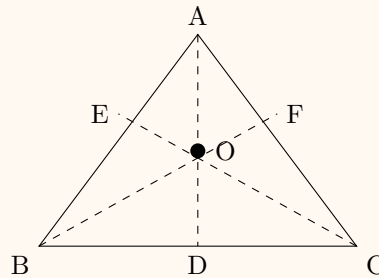
C.

- Hauteur relative à [AB] : (HO)
- Hauteur relative à [AH] : (CB)
- Orthocentre : C
- Hauteur relative à [BH] : (AO)

3.2 Exercice 2

Exercice 2

- 1) Dans la figure ci-contre : Tracer F le point d'intersection des deux droites (CD) et (BE)
- 2) Montrer que (AF) $\perp$ (BC)



Solution Exercice 2

- 1) F est le point d'intersection de (CD) et (BE), c'est aussi l'orthocentre du triangle ABC.
- 2) Comme F est l'orthocentre, (AF) est nécessairement perpendiculaire à (BC) par définition de l'orthocentre.

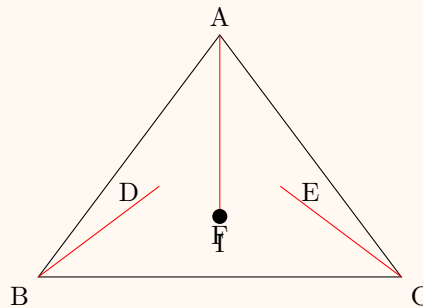
3.3 Exercice 3

Exercice 3

Dans la figure suivante, I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

On donne : $\widehat{EBC} = 32^\circ$ et $\widehat{DCB} = 25^\circ$

- 1) Calculer $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Justifier les réponses.
- 2) Déterminer les mesures des angles $\widehat{BAC}$ puis $\widehat{BAI}$. Justifier.



Solution Exercice 3

- 1)
 - $\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{EBC} = 2 \times 32^\circ = 64^\circ$ (car [BE] est bissectrice)
 - $\widehat{ACB} = 2 \times \widehat{DCB} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$ (car [CD] est bissectrice)
- 2)
 - $\widehat{BAC} = 180^\circ - (64^\circ + 50^\circ) = 66^\circ$
 - $\widehat{BAI} = \frac{66^\circ}{2} = 33^\circ$ (car [AI] est bissectrice)

3.4 Exercice 4

Exercice 4

ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que : $\widehat{ABC} = 50^\circ$ et $BC = 4\text{cm}$.

(AH) est la hauteur issue du point A.

1) Dessiner une figure convenable.

2)

— a) Calculer en justifiant : $\widehat{HAC}$ et $\widehat{HAB}$

— b) En déduire que la demi-droite [AH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$

3)

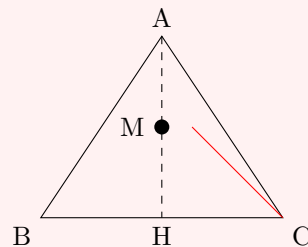
— a) Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, tel qu'elle coupe le segment [AH] en M.

— b) Calculer en justifiant $\widehat{CMH}$.

— c) Prouver que [BM) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Solution Exercice 4

1) Figure :



2)

— a) $\widehat{HAC} = \widehat{HAB} = 40^\circ$ (car triangle isocèle et somme des angles)

— b) [AH) partage $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux, donc c'est la bissectrice.

3)

— b) $\widehat{CMH} = 90^\circ + \frac{50^\circ}{2} = 115^\circ$

— c) M est le centre du cercle inscrit, donc [BM) est nécessairement la bissectrice.

3.5 Exercice 5

Exercice 5

MAD est un triangle tel que $AP = 6\text{cm}$, $\widehat{MAP} = 80^\circ$ et $\widehat{MPA} = 40^\circ$.

La bissectrice de $\widehat{MAP}$ coupe [MP] en I.

— Faire une figure.

— Comparer AI et IP.

La bissectrice de l'angle $\widehat{AMP}$ coupe (AI) en O.

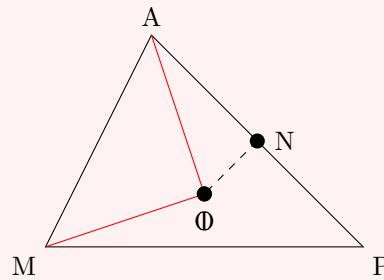
— Déterminer la mesure de $\widehat{OPA}$, en justifiant la réponse.

Soit N le milieu de [AP].

— Montrer que (NI)(AP).

Solution Exercice 5

— Figure :



- $AI = IP$ (car triangle AIP isocèle en I)
- $\widehat{OPA} = 30^\circ$ (par calcul des angles)
- (NI) est la médiatrice de [AP] donc (NI)(AP)

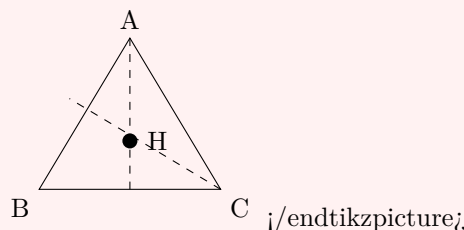
3.6 Exercice 6

Exercice 6

- Peut-on construire un triangle ABC tel que $AB = 2\text{cm}$, $AC = 4.5\text{cm}$ et $BC = 3\text{cm}$? Justifier.
- Construire le triangle ABC, puis placer le point H, intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par A et la perpendiculaire à (AB) passant par C.
- Que représente le point H pour le triangle ABC? Justifier.
- Montrer que $(BH)(AC)$.
- Quel est l'orthocentre du triangle HBC? Justifier.
- Quel est l'orthocentre du triangle ABH? Justifier.

Solution Exercice 6

- Oui, car $2 + 3 > 4.5$ (inégalité triangulaire)
- Figure :



- H est l'orthocentre du triangle ABC.
- (BH) est la troisième hauteur, donc $(BH)(AC)$.
- L'orthocentre de HBC est A.
- L'orthocentre de ABH est C.

Fin de la séance - À vos exercices !