

Développement et factorisation

Niveau : 1ère Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Rappel
- II. Expression littérale
- III. Développement
- IV. Factorisation
- V. Les identités remarquables
- VI. Exercices

1 Rappel

1.1 Signe devant une parenthèse

Règle

Dans une somme algébrique :

- Les parenthèses précédées du signe + ne changent pas les signes des nombres à l'intérieur.
- Les parenthèses précédées du signe - changent les signes des nombres à l'intérieur.

Exemple

- $5 + (3x - 2) = 5 + 3x - 2 = 3x + 3$
- $5 - (3x - 2) = 5 - 3x + 2 = 7 - 3x$

1.2 Suppression du symbole de multiplication

Convention d'écriture

On peut omettre le signe $\times$ lorsqu'il est suivi d'une lettre ou d'une parenthèse.

Exemples

- $3 \times (5 + 6)$ devient $3(5 + 6)$
- $(1 + 2) \times (3 + 4)$ devient $(1 + 2)(3 + 4)$
- $5 \times a$ devient $5a$
- $a \times b$ devient ab

2 Expression littérale

2.1 Définition

Définition

Une expression littérale contient des nombres et des lettres représentant des variables.

Exemples

- $B = 5x^2 + 3x + (4x - 2) - (x^2 + 1)$ est une expression littérale avec x comme variable.
- $C = 5x^2 + 3y + (4x - 2) - (y + 1)$ est une expression littérale avec deux variables x et y .

Remarque : Si une même lettre apparaît plusieurs fois dans une expression, elle représente toujours le même nombre.

3 Développement

3.1 Définition

Définition

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme ou une différence.

Exemple

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

3.2 Propriété 1 : Produit d'un nombre par une somme

Distributivité

Pour tous nombres k, a, b :

$$k(a + b) = ka + kb$$

Exemple

$$4(3x + 5) = 12x + 20$$

3.3 Propriété 2 : Produit d'un nombre par une différence

Distributivité

Pour tous nombres k, a, b :

$$k(a - b) = ka - kb$$

Exemple

$$3(2x - 7) = 6x - 21$$

3.4 Propriété 3 : Double distributivité

Double distributivité

Pour tous nombres a, b, c, d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple

$$(2x + 3)(4x - 5) = 8x^2 - 10x + 12x - 15 = 8x^2 + 2x - 15$$

4 Factorisation

4.1 Définition

Définition

Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

Exemple

$$6x + 9 = 3(2x + 3)$$

4.2 Propriété

Factorisation

Pour tous nombres k, a, b :

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

Exemple

$$15x^2 - 5x = 5x(3x - 1)$$

5 Les identités remarquables

5.1 Règles

Identités remarquables

Pour tous nombres a, b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples

$$— (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$— (2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$— (3x + 4)(3x - 4) = 9x^2 - 16$$

6 Exercices

6.1 Exercice 1

Développer et réduire

Développer et réduire les expressions suivantes :

- $A = 2(1 - x) = \dots$
- $B = 6x(2x + 5) = \dots$
- $C = -4x(x^2 - 3x + 1) = \dots$
- $D = -3(5x - 4) - 2(x + 2) = \dots$
- $E = -5x(-x - 1) - 2x(x + 4) = \dots$
- $F = (6x + 3)(2x + 3) = \dots$
- $G = (3x - 4)(4x - 7) = \dots$
- $H = 6x^2(1 - x^2 + x) - 7x(3x - 2) + 5x - 8 = \dots$

Solution Exercice 1

- $A = 2 - 2x$
- $B = 12x^2 + 30x$
- $C = -4x^3 + 12x^2 - 4x$
- $D = -15x + 12 - 2x - 4 = -17x + 8$
- $E = 5x^2 + 5x - 2x^2 - 8x = 3x^2 - 3x$
- $F = 12x^2 + 18x + 6x + 9 = 12x^2 + 24x + 9$
- $G = 12x^2 - 21x - 16x + 28 = 12x^2 - 37x + 28$
- $H = 6x^2 - 6x^4 + 6x^3 - 21x^2 + 14x + 5x - 8 = -6x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 19x - 8$

6.2 Exercice 2

Factoriser

Factoriser chacune des expressions :

- $A = 20x - 4 = \dots$
- $B = -5x^2 + 11x = \dots$
- $C = -7x^2 + 21x^3 - 14x = \dots$
- $D = 6x^4 - 12x^3 + 15x^2 = \dots$
- $E = 15x^6 - 5x^4 + 20x^2 = \dots$
- $F = -7(x + 1) - 4x(x + 1) = \dots$
- $G = (x + 3)(2x + 3) - 7(2x + 3) = \dots$
- $H = (3x - 4)(5x + 4) - (3x - 4)(x - 2) = \dots$
- $I = 3x(5x - 7) - (5x + 7)(5x - 7) + (2x + 1)(5x - 7) = \dots$

Solution Exercice 2

- $A = 4(5x - 1)$
- $B = x(-5x + 11)$
- $C = 7x(-x + 3x^2 - 2)$ ou $-7x(x - 3x^2 + 2)$
- $D = 3x^2(2x^2 - 4x + 5)$
- $E = 5x^2(3x^4 - x^2 + 4)$
- $F = (x + 1)(-7 - 4x)$
- $G = (2x + 3)(x + 3 - 7) = (2x + 3)(x - 4)$
- $H = (3x - 4)[(5x + 4) - (x - 2)] = (3x - 4)(4x + 6) = 2(3x - 4)(2x + 3)$
- $I = (5x - 7)[3x - (5x + 7) + (2x + 1)] = (5x - 7)(-7 + 1) = (5x - 7)(-6) = -6(5x - 7)$

6.3 Exercice 3

Identités remarquables

Développer et réduire :

$$— A = (2x + 9)^2 = \dots$$

$$— B = (4x - 8)^2 = \dots$$

$$— C = (6x - 5)(6x + 5) = \dots$$

$$— D = (10x - 5)^2 - (7x + 7)^2 = \dots$$

$$— E = (3x - 4)^2 + (x + 2)(x - 2) = \dots$$

$$— F = (7x - 8)(7x + 8) + (6x + 4)^2 = \dots$$

Solution Exercice 3

$$— A = 4x^2 + 36x + 81$$

$$— B = 16x^2 - 64x + 64$$

$$— C = 36x^2 - 25$$

$$— D = (100x^2 - 100x + 25) - (49x^2 + 98x + 49) = 51x^2 - 198x - 24$$

$$— E = (9x^2 - 24x + 16) + (x^2 - 4) = 10x^2 - 24x + 12$$

$$— F = (49x^2 - 64) + (36x^2 + 48x + 16) = 85x^2 + 48x - 48$$

6.4 Exercice 4

Factorisation avec identités remarquables

Factoriser :

$$— A = 16x^2 - 8x + 1 = \dots$$

$$— B = 9x^2 - 42x + 49 = \dots$$

$$— C = 16 - 25x^2 = \dots$$

$$— D = 25x^2 - 20x + 4 = \dots$$

$$— E = 49x^2 + 84x + 36 = \dots$$

$$— F = (-6x + 3)^2 - 16 = \dots$$

Solution Exercice 4

$$— A = (4x - 1)^2$$

$$— B = (3x - 7)^2$$

$$— C = (4 - 5x)(4 + 5x)$$

$$— D = (5x - 2)^2$$

$$— E = (7x + 6)^2$$

$$— F = (-6x + 3 - 4)(-6x + 3 + 4) = (-6x - 1)(-6x + 7) = (6x + 1)(6x - 7)$$

6.5 Exercice 5

Exercice combiné

On pose :

$$A = (3x - 1)^2 \quad B = (2x + 4)^2 \quad C = (3x - 1)(2x + 4)$$

— Développer et simplifier A, B et C

— Factoriser $A - B$

— Factoriser $A + 2C + B$

Solution Exercice 5

- $A = 9x^2 - 6x + 1$
- $B = 4x^2 + 16x + 16$
- $C = 6x^2 + 12x - 2x - 4 = 6x^2 + 10x - 4$
- $A - B = (3x - 1)^2 - (2x + 4)^2 = [(3x - 1) - (2x + 4)][(3x - 1) + (2x + 4)] = (x - 5)(5x + 3)$
- $A + 2C + B = (9x^2 - 6x + 1) + 2(6x^2 + 10x - 4) + (4x^2 + 16x + 16) = 25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$

6.6 Exercice 6

Factorisation et calcul

Factoriser puis calculer :

- $A = 14 \times (-3) + 14 \times 7 + 14 \times 6 + 14 \times (-11)$
- $B = 23 \times (-1.25) - 22 \times (-1.25) - 1.25$
- $C = 200 \times (-300) + (-100) \times 200 + (-100) \times 99$

Solution Exercice 6

- $A = 14(-3 + 7 + 6 - 11) = 14(-1) = -14$
- $B = -1.25(23 - 22 + 1) = -1.25(2) = -2.5$
- $C = -100(600 + 200 + 99) = -100(899) = -89,900$

6.7 Exercice 7

Réduction d'expressions

Réduire les expressions :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| — $A = 12.6x + 6x + x - 3.6x = \dots$ | — $D = -2x + 8x + x = \dots$ |
| — $B = 6x - 20x + 30x = \dots$ | — $E = 3x + 2x + 6 - (6 - 7x) = \dots$ |
| — $C = 3x - 21x + 4x = \dots$ | — $F = (5x + 1) - (3x + 1) - 2x = \dots$ |

Solution Exercice 7

- $A = (12.6 + 6 + 1 - 3.6)x = 16x$
- $B = (6 - 20 + 30)x = 16x$
- $C = (3 - 21 + 4)x = -14x$
- $D = (-2 + 8 + 1)x = 7x$
- $E = 5x + 6 - 6 + 7x = 12x$
- $F = 5x + 1 - 3x - 1 - 2x = 0$

Fin de la séance - À vos exercices !