

Addition et soustraction des nombres rationnels

Niveau : 2ème Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Addition des nombres rationnels
 - 1-1. Même dénominateur
 - 1-2. Dénominateurs différents
 - 1-3. Nombres opposés
- II. Soustraction des nombres rationnels
 - 2-1. Même dénominateur
 - 2-2. Dénominateurs différents
- III. Somme de trois nombres rationnels
 - 3-1. Commutativité
 - 3-2. Règle générale
- IV. Exercices
 - 4-1. Exercice 1
 - 4-2. Exercice 2
 - 4-3. Exercice 3
 - 4-4. Exercice 4
 - 4-5. Exercice 5
 - 4-6. Exercice 6
 - 4-7. Exercice 7

1 Addition des nombres rationnels

1.1 Même dénominateur

1-1/ Règle

Pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} + \frac{1}{5} &= \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5} \\ \frac{-2}{7} + \frac{5}{7} &= \frac{-2+5}{7} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

1.2 Dénominateurs différents

1-2/ Règle

Pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$:

1. Trouver un dénominateur commun (PPCM de b et d)
2. Transformer chaque fraction
3. Additionner les numérateurs

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$$

Exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{-2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{-8}{20} = \frac{7}{20}$$

Cas particulier

Si un dénominateur est multiple de l'autre :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{k \times b} = \frac{a \times k + c}{k \times b}$$

Exemple

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

1.3 Nombres opposés

1-3/ Propriété

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$

Exemple

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\frac{-5}{7} + \frac{5}{7} = 0$$

2 Soustraction des nombres rationnels

2.1 Même dénominateur

2-1/ Règle

Pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

Exemple

$$\frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{8} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$$

2.2 Dénominateurs différents

2-2/ Règle

Pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$:

1. Trouver un dénominateur commun
2. Transformer chaque fraction
3. Soustraire les numérateurs

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

Exemple

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{-2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{-4}{10} - \frac{5}{10} = \frac{-9}{10}$$

3 Somme de trois nombres rationnels

3.1 Commutativité

3-1/ Propriété

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Remarque :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

Exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

3.2 Règle générale

3-2/ Règle

Pour additionner plusieurs fractions :

1. Trouver un dénominateur commun à toutes
2. Transformer chaque fraction
3. Additionner tous les numérateurs

Exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

4 Exercices

4.1 Exercice 1

4-1/ Exercice 1

Calculer et simplifier :

1. $\frac{15}{-3} + \frac{1}{9} =$
2. $\frac{6}{8} + \frac{-5}{12} =$
3. $\frac{13}{12} + \frac{-8}{3} =$
4. $\frac{-7}{-15} + \frac{22}{-15} =$
5. $\frac{14}{-6} + \frac{5}{6} =$
6. $\frac{7}{11} + \frac{15}{11} =$
7. $\frac{11}{-3} - \frac{-8}{-4} =$
8. $\frac{-7}{4} - \left(-\frac{6}{3}\right) =$
9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$
10. $\frac{17}{8} - \left(-\frac{1}{3}\right) =$
11. $-5 + \frac{11}{7} =$
12. $\frac{5}{11} + \frac{-2}{7} =$

Solution 4-1

1. $\frac{-45}{9} + \frac{1}{9} = \frac{-44}{9}$
2. $\frac{18}{24} + \frac{-10}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
3. $\frac{13}{12} + \frac{-32}{12} = \frac{-19}{12}$
4. $\frac{7}{15} + \frac{-22}{15} = \frac{-15}{15} = -1$
5. $\frac{-14}{6} + \frac{5}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$
6. $\frac{22}{11} = 2$
7. $\frac{-11}{3} - \frac{2}{1} = \frac{-11}{3} - \frac{6}{3} = \frac{-17}{3}$
8. $\frac{-7}{4} + 2 = \frac{-7}{4} + \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$
9. $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
10. $\frac{51}{24} + \frac{8}{24} = \frac{59}{24}$
11. $\frac{-35}{7} + \frac{11}{7} = \frac{-24}{7}$
12. $\frac{35}{77} + \frac{-22}{77} = \frac{13}{77}$

4.2 Exercice 2

4-2/ Exercice 2

Calculer :

1. $A = \frac{1}{2} + 5 - \frac{3}{4}$
2. $B = -2,5 + \frac{-2}{5} - \frac{1}{2}$
3. $C = \left(\frac{-9}{7} + 2\right) + \left(1 - \frac{3}{7}\right)$
4. $D = \left(\frac{2}{3} - 1\right) + \left(2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

Solution 4-2

1. $A = \frac{1}{2} + \frac{20}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{20}{4} - \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$
2. $B = \frac{-5}{2} + \frac{-2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{-25}{10} + \frac{-4}{10} - \frac{5}{10} = \frac{-34}{10} = \frac{-17}{5}$
3. $C = (\frac{-9}{7} + \frac{14}{7}) + (\frac{7}{7} - \frac{3}{7}) = \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9}{7}$
4. $D = (\frac{2}{3} - \frac{3}{3}) + (\frac{4}{2} + \frac{3}{2}) - (\frac{3}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{-1}{3} + \frac{7}{2} - \frac{5}{6} = \frac{-2}{6} + \frac{21}{6} - \frac{5}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

4.3 Exercice 3

4-3/ Exercice 3

- 1) Trouver x :
 - $-\frac{7}{8} + x = \frac{7}{24}$ ($x = \underline{\hspace{2cm}}$)
 - $\frac{3}{5} + x = \frac{2}{7}$ ($x = \underline{\hspace{2cm}}$)
- 2) Compléter :
 - $\frac{9}{5} + \underline{\hspace{2cm}} = \frac{15}{5}$
 - $\frac{9}{5} - \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{5}$
 - $-\frac{3}{4} + \underline{\hspace{2cm}} = \frac{2}{8}$
 - $\underline{\hspace{2cm}} + \frac{3}{5} = \frac{23}{15}$
 - $\frac{5}{8} - \underline{\hspace{2cm}} = \frac{3}{40}$
 - $\frac{3}{4} + \underline{\hspace{2cm}} = \frac{23}{24}$

Solution 4-3

- 1)
 - $x = \frac{7}{24} - (-\frac{7}{8}) = \frac{7}{24} + \frac{21}{24} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$
 - $x = \frac{2}{7} - \frac{3}{5} = \frac{10}{35} - \frac{21}{35} = \frac{-11}{35}$
- 2)
 - $\frac{6}{5}$
 - $\frac{8}{5}$
 - $\frac{8}{8} = 1$
 - $\frac{14}{15}$
 - $\frac{22}{40} = \frac{11}{20}$
 - $\frac{5}{24}$

4.4 Exercice 4

4-4/ Exercice 4

Trouver x et y tels que :

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = 0$$

$$-\frac{3}{2}y - \frac{-2}{6} = \frac{11}{3}$$

Solution 4-4

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x &= \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12} \\ x &= \frac{7}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{2}y + \frac{1}{3} &= \frac{11}{3} \\ -\frac{3}{2}y &= \frac{10}{3} \\ y &= \frac{10}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

4.5 Exercice 5

4-5/ Exercice 5

1) Trouver x tel que :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{7}{10}$$

2) Montrer que :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

3) Calculer :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900}$$

Solution 4-5

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{x} &= \frac{7}{10} \\ \frac{1}{x} &= \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

2)

$$\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

3) En utilisant la relation précédente :

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

4.6 Exercice 6

4-6/ Exercice 6

Trois cousins héritent :

- Moncef : $\frac{11}{36}$ de la somme
- Amina : $\frac{5}{9}$ de la somme
- Manal : 2 220 dirhams (le reste)

1. Calculer la part de chacun
2. Qui a reçu le quart d'un autre cousin ?

Solution 4-6

1) Soit S la somme totale :

$$\frac{11}{36}S + \frac{20}{36}S + 2220 = S$$

$$\frac{31}{36}S + 2220 = S$$

$$2220 = \frac{5}{36}S$$

$$S = 2220 \times \frac{36}{5} = 15\,984 \text{ dirhams}$$

Parts :

— Moncef : $\frac{11}{36} \times 15\,984 = 4\,884$ dirhams

— Amina : $\frac{5}{9} \times 15\,984 = 8\,880$ dirhams

— Manal : 2 220 dirhams

2) $\frac{4\,884}{8\,880} \approx 0,55 \neq \frac{1}{4}$
 $\frac{2\,220}{8\,880} = \frac{1}{4}$ (Manal a reçu le quart d'Amina)

4.7 Exercice 7

4-7/ Exercice 7

Un camion consomme :

— $\frac{1}{3}$ du carburant sur une première distance

— $\frac{5}{12}$ du carburant à mi-chemin

1. Quelle fraction a été consommée jusqu'à mi-chemin ?
2. Le reste est-il suffisant pour terminer le trajet ?

Solution 4-7

1) Fraction consommée jusqu'à mi-chemin :

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$$

2) Total consommé à mi-chemin :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Reste : $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

Comme $\frac{7}{12} > \frac{5}{12}$, le carburant restant est suffisant.

Fin de la séance - À vos exercices !