

# Introduction aux nombres rationnels

*Niveau : 2ème Année Collège*

**Prof : AIT MAMA MOHAMED**

## Sommaire

- I. Présentation et comparaison
  - 1-1. Définition
  - 1-2. Propriétés
- II. Signe d'un nombre rationnel
- III. Simplification
- IV. Égalité et produits en croix
- V. Nombres rationnels et équations
- VI. Exercices
  - 6-1. Exercice 1
  - 6-2. Exercice 2
  - 6-3. Exercice 3
  - 6-4. Exercice 4
  - 6-5. Exercice 5
  - 6-6. Exercice 6
  - 6-7. Exercice 7

## 1 Présentation et comparaison des nombres rationnels

### 1.1 Définition

#### 1-1/ Définition

Un **nombre rationnel** est le quotient  $\frac{a}{b}$  où :

- $a \in \mathbb{Z}$  (numérateur)
- $b \in \mathbb{Z}^*$  (dénominateur non nul)

#### Exemples

- $\frac{3}{4}, \frac{-5}{2}, \frac{7}{-3}$  sont des nombres rationnels
- $\frac{0}{1} = 0$  est rationnel
- $\frac{1}{0}$  n'existe pas (division par zéro impossible)

### 1.2 Propriétés

#### 1-2/ Propriétés

- Tout entier relatif est rationnel :  $n = \frac{n}{1}$
- Tout décimal est rationnel :  $1,5 = \frac{3}{2}$
- Certains rationnels ne sont pas décimaux :  $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$

### Exemples

- $-4 = \frac{-4}{1}$  est rationnel
- $0,75 = \frac{3}{4}$  est rationnel
- $\frac{2}{7} \approx 0,285714$  n'est pas décimal

## 2 Signe d'un nombre rationnel

### Règle

Pour  $\frac{a}{b}$  :

- **Positif** si  $a$  et  $b$  de même signe
- **Négatif** si  $a$  et  $b$  de signes contraires
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$  et  $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

### Exemples

- $\frac{3}{5} > 0$ ,  $\frac{-2}{-7} > 0$
- $\frac{-3}{4} < 0$ ,  $\frac{5}{-2} < 0$
- $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$

## 3 Simplification d'un nombre rationnel

### Règle

Pour  $k \in \mathbb{Z}^*$  :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

### Exemple

- $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  (simplifié par 2)
- $\frac{-15}{25} = \frac{-3}{5}$  (simplifié par 5)
- $\frac{18}{-12} = \frac{-3}{2}$  (simplifié par 6)

## 4 Égalité des nombres rationnels et produits en croix

### Théorème

Pour  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$$

### Exemple

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  car  $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$
- $\frac{-5}{7} \neq \frac{5}{-8}$  car  $-5 \times -8 = 40 \neq 35 = 7 \times 5$

## 5 Le nombre rationnel et les équations

### Propriété

$\frac{b}{a}$  est solution de  $ax = b$  ( $a \neq 0$ )

### Exemple

- $3x = 5$  a pour solution  $x = \frac{5}{3}$
- $-2x = 7$  a pour solution  $x = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$

## 6 Exercices

### 6.1 Exercice 1

#### 6-1/ Exercice 1

1) Écrire avec dénominateur 36 :

$$\frac{-5,5}{-9}, \frac{-17}{6}, \frac{1,5}{2}, \frac{7}{-12}, \frac{-5}{3}$$

2) Écrire avec numérateur -18 :

$$\frac{6}{-13}, \frac{-1}{2}, \frac{9}{7}, \frac{-2}{11}, \frac{3}{-5}$$

3) Compléter :

$$\frac{-21}{15} = \frac{7}{\dots} = \frac{\dots}{-30} = \frac{-3}{\dots}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{-1}{\dots} = \frac{\dots}{-36} = \frac{12}{\dots}$$

#### Solution 6-1

1)

- $\frac{-5,5}{-9} = \frac{22}{36}$  ( $\times 4$ )
- $\frac{-17}{6} = \frac{-102}{36}$  ( $\times 6$ )
- $\frac{1,5}{2} = \frac{27}{36}$  ( $\times 18$ )
- $\frac{7}{-12} = \frac{-21}{36}$  ( $\times 3$ )
- $\frac{-5}{3} = \frac{-60}{36}$  ( $\times 12$ )

2)

- $\frac{6}{-13} = \frac{-18}{39}$  ( $\times -3$ )
- $\frac{-1}{2} = \frac{-18}{36}$  ( $\times 18$ )
- $\frac{9}{7} = \frac{-18}{-14}$  ( $\times -2$ )
- $\frac{-2}{11} = \frac{-18}{99}$  ( $\times 9$ )
- $\frac{3}{-5} = \frac{-18}{30}$  ( $\times -6$ )

3)

$$\frac{-21}{15} = \frac{7}{-5} = \frac{42}{-30} = \frac{-3}{15/7}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{-1}{-2} = \frac{-18}{-36} = \frac{12}{24}$$

## 6.2 Exercice 2

### 6-2/ Exercice 2

Simplifier :

$$\frac{11 \times (-3) \times 7 \times 12}{6 \times (-7) \times 3 \times 22} = \text{-----}$$

$$\frac{2 \times (-5)}{(-2) \times 3} = \text{-----}$$

$$\frac{4 \times (-5) \times 11}{(-11) \times 2 \times 10} = \text{-----}$$

$$\frac{-24}{42} = \text{-----}$$

$$\frac{36}{45} = \text{-----}$$

$$\frac{720}{-540} = \text{-----}$$

### Solution 6-2

$$- \frac{11 \times (-3) \times 7 \times 12}{6 \times (-7) \times 3 \times 22} = \frac{1}{1} \text{ (simplifié par } 3 \times 7 \times 11 \times 12)$$

$$- \frac{2 \times (-5)}{(-2) \times 3} = \frac{5}{3}$$

$$- \frac{4 \times (-5) \times 11}{(-11) \times 2 \times 10} = 1$$

$$- \frac{-24}{42} = \frac{-4}{7}$$

$$- \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

$$- \frac{720}{-540} = \frac{-4}{3}$$

## 6.3 Exercice 3

### 6-3/ Exercice 3

Vérifier les égalités :

$$\frac{2}{24} \text{ -- } \frac{1}{12}$$

$$\frac{10}{-4} \text{ -- } \frac{25}{-6}$$

$$\frac{-13}{18} \text{ -- } \frac{2}{-3}$$

$$\frac{-5}{2} \text{ -- } \frac{13}{-5}$$

$$\frac{-8}{6} \text{ -- } \frac{4}{-3}$$

### Solution 6-3

$$- \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ (produit en croix : } 2 \times 12 = 24 = 1 \times 24)$$

$$- \frac{10}{-4} \neq \frac{25}{-6} \text{ (} 10 \times -6 = -60 \text{ -} 100 = -4 \times 25)$$

$$- \frac{-13}{18} \neq \frac{2}{-3} \text{ (-} 13 \times -3 = 39 \text{ } 36 = 18 \times 2)$$

$$- \frac{-5}{2} \neq \frac{13}{-5} \text{ (-} 5 \times -5 = 25 \text{ } 26 = 2 \times 13)$$

$$- \frac{-8}{6} = \frac{4}{-3} \text{ (-} 8 \times -3 = 24 = 6 \times 4)$$

## 6.4 Exercice 4

### 6-4/ Exercice 4

Résoudre :

1.  $7x = -15$
2.  $15x = 25$
3.  $-12x = -8$
4.  $-12x = 4,8$
5.  $-\frac{7}{3}x = -\frac{14}{9}$
6.  $-0,5x = \frac{5}{60}$

### Solution 6-4

1.  $x = \frac{-15}{7}$
2.  $x = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$
3.  $x = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$
4.  $x = \frac{4,8}{-12} = -0,4$
5.  $x = \frac{-14/9}{-7/3} = \frac{14}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$
6.  $x = \frac{5/60}{-0,5} = \frac{5}{60} \times \frac{-2}{1} = \frac{-10}{60} = \frac{-1}{6}$

## 6.5 Exercice 5

### 6-5/ Exercice 5

1) Trouver  $x$  tel que :

$$\frac{2x + 1}{-3 + x} = \frac{3}{2}$$

2) Trouver  $y$  tel que :

$$\frac{-5 + y}{3 - y} = \frac{3}{-2}$$

### Solution 6-5

1) Produit en croix :

$$2(2x + 1) = 3(-3 + x)$$

$$4x + 2 = -9 + 3x$$

$$x = -11$$

2) Produit en croix :

$$-2(-5 + y) = 3(3 - y)$$

$$10 - 2y = 9 - 3y$$

$$y = -1$$

### 6.6 Exercice 6

#### 6-6/ Exercice 6

Compléter :

$$1\frac{2}{3} = \frac{10}{\quad} = \frac{\quad}{12} = 1\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{0,75}$$

$$2\frac{-7}{8} = \frac{35}{\quad} = \frac{\quad}{-1000} = \frac{-3,5}{\quad} = \frac{\quad}{2}$$

#### Solution 6-6

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{20}{12} = 1\frac{2}{3} = \frac{1,25}{0,75}$$

$$2\frac{-7}{8} = \frac{9}{8} = \frac{35}{31,11\dots} = \frac{-1125}{-1000} = \frac{-3,5}{-3,11\dots} = \frac{2,25}{2}$$

### 6.7 Exercice 7

#### 6-7/ Exercice 7

Simplifier :

$$\frac{2 \times (-55)}{11 \times 3 \times (-5)}$$

$$\frac{(-5) \times 7}{28 \times (-5)}$$

$$\frac{-27}{2727}$$

$$\frac{92}{112}$$

$$\frac{42}{-24}$$

#### Solution 6-7

$$\frac{2 \times (-55)}{11 \times 3 \times (-5)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{(-5) \times 7}{28 \times (-5)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{-27}{2727} = \frac{-1}{101}$$

$$\frac{92}{112} = \frac{23}{28}$$

$$\frac{42}{-24} = \frac{-7}{4}$$

Fin de la séance - À vos exercices !