

Les puissances

Niveau : 2ème Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. La puissance d'un nombre rationnel
 - 1-1/ Définition
 - 1-2/ Cas particuliers
 - 1-3/ Puissance d'exposant négatif
 - 1-4/ Signe d'une puissance de base négative
- II. Propriétés de calculs sur les puissances
 - 2-1/ Produit de puissances de même base
 - 2-2/ Quotient de puissances de même base
 - 2-3/ Produit de puissances de même exposant
 - 2-4/ Quotient de puissances de même exposant
 - 2-5/ Puissance d'une puissance
- III. L'écriture scientifique
 - 3-1/ Les puissances de 10
 - 3-2/ L'écriture scientifique
- IV. Exercices
 - 4-1/ Exercice 1
 - 4-2/ Exercice 2
 - 4-3/ Exercice 3
 - 4-4/ Exercice 4
 - 4-5/ Exercice 5
 - 4-6/ Exercice 6
 - 4-7/ Exercice 7

1 La puissance d'un nombre rationnel

1.1 Définition

1-1/ Définition

Soit a un nombre rationnel et n un entier naturel non nul :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemple

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

1.2 Cas particuliers

1-2/ Cas particuliers

- $a^0 = 1$ (pour $a \neq 0$)
- $a^1 = a$
- $0^n = 0$ (pour $n \neq 0$)
- 0^0 n'existe pas

Exemple

$$\left(-\frac{5}{7}\right)^0 = 1 \quad ; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} \quad ; \quad 0^{15} = 0$$

1.3 Puissance d'exposant négatif

1-3/ Puissance d'exposant négatif

Soit a un nombre rationnel non nul et n un entier naturel :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Pour $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel non nul et n un entier naturel :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemple

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad ; \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

1.4 Signe d'une puissance de base négative

1-4/ Signe d'une puissance de base négative

Une puissance de base négative est :

- **Positive** si l'exposant est pair
- **Négative** si l'exposant est impair

Exemple

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= 16 \quad (\text{exposant pair}) \\ (-3)^5 &= -243 \quad (\text{exposant impair}) \end{aligned}$$

2 Propriétés de calculs sur les puissances

2.1 Produit de deux puissances de même base

2-1/ Produit de puissances de même base

Soit a un nombre rationnel non nul, m et n deux entiers naturels :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemple

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^9$$

2.2 Quotient de deux puissances de même base**2-2/ Quotient de puissances de même base**

Soit a un nombre rationnel non nul, m et n deux entiers naturels :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemple

$$\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$$

2.3 Produit de deux puissances de même exposant**2-3/ Produit de puissances de même exposant**

Soit a et b deux nombres rationnels non nuls, m un entier naturel :

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

Exemple

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

2.4 Quotient de deux puissances de même exposant**2-4/ Quotient de puissances de même exposant**

Soit a et b deux nombres rationnels non nuls, m un entier naturel :

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Exemple

$$\frac{6^4}{3^4} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$$

2.5 Puissance d'une puissance**2-5/ Puissance d'une puissance**

Soit a un nombre rationnel non nul, m et n deux entiers naturels :

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Exemple

$$\left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{3 \times 2} = \left(\frac{1}{2} \right)^6 = \frac{1}{64}$$

3 L'écriture scientifique d'un nombre décimal relatif

3.1 Les puissances de 10

3-1/ Les puissances de 10

Pour tout entier naturel n :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1 \underbrace{00 \cdots 0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0, \underbrace{00 \cdots 0}_{n-1 \text{ zéros}} 1$$

Exemple

$$10^5 = 100000 \quad ; \quad 10^{-3} = 0,001$$

3.2 L'écriture scientifique

3-2/ L'écriture scientifique

Règle : Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme :

$$a \times 10^n$$

où a est un nombre décimal tel que $1 \leq |a| < 10$ et n est un entier relatif.

Exemple

$$325 = 3,25 \times 10^2$$

$$0,0045 = 4,5 \times 10^{-3}$$

4 Exercices

4.1 Exercice 1

4-1/ Exercice 1

Calculer :

a) $\frac{5^2}{1^5}$

b) $17^0 \times 9$

c) $(-2)^5$

d) $\left(-\frac{7}{9}\right)^2$

e) 1^{2009}

f) 0^{2008}

g) $(-1)^{2008}$

h) $\left(-\frac{153}{3}\right)^0$

i) $\left(\frac{142}{35}\right)^1$

j) 11^3

k) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

l) 10^{-7}

m) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{21}{91}\right)^8\right]^0$

n) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{6}{2}\right)^5\right]^2$

o) $\left(\frac{6}{5}\right)^3 \times \frac{1}{2^{10}} \times \left(\frac{15}{18}\right)^4$

p) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \left(\frac{27}{3}\right)^3 \times 2^9$

Correction Exercice 1

- | | | |
|------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $\frac{25}{1} = 25$ | g) 1 | m) 1 (toute puissance 0 vaut 1) |
| b) $1 \times 9 = 9$ | h) 1 | n) $(\frac{1}{27} \times 243)^2 = 9^2 = 81$ |
| c) -32 | i) $\frac{142}{35}$ | o) $\frac{216}{125} \times \frac{1}{1024} \times \frac{50625}{104976} = \frac{27}{20480}$ |
| d) $\frac{49}{81}$ | j) 1331 | p) $\frac{1}{81} \times 729 \times 512 = 4608$ |
| e) 1 | k) $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$ | |
| f) 0 | l) 0,0000001 | |

4.2 Exercice 2**4-2/ Exercice 2**

Déterminer le signe en justifiant votre réponse :

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $-5^2(-3)^3 - (-7)^2$ | e) $(-\frac{11}{27})^{211}$ |
| b) $-(-4)^3 \times (-7)^{11}$ | f) $(-\frac{11}{35})^{11}$ |
| c) $(77 - 5)^{2008}$ | g) $(-12)^3$ |
| d) -3^{38} | |

Correction Exercice 2

- | | |
|---|---|
| a) $-25 \times (-27) - 49 = 675 - 49 = 626 > 0$ | e) Négatif (base négative et exposant impair) |
| b) $-(-64) \times (-7^{11}) = 64 \times (-7^{11}) < 0$ | f) Négatif (base négative et exposant impair) |
| c) $72^{2008} > 0$ (toute puissance paire est positive) | g) Négatif (base négative et exposant impair) |
| d) $-3^{38} < 0$ (opposé d'un nombre positif) | |

4.3 Exercice 3**4-3/ Exercice 3**

Écrire sous forme de puissance d'un nombre rationnel :

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $3^5 \times 2^5$ | d) $(\frac{5^3}{2^3})^2$ |
| b) $\frac{7^4}{5^4}$ | e) $\frac{10^3 \times 15^3}{30^4}$ |
| c) $\frac{2^6 \times 3^6}{6^5}$ | f) $(\frac{3^{-2}}{2^{-2}})^3$ |

Correction Exercice 3

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $(3 \times 2)^5 = 6^5$ | d) $(\frac{5}{2})^6$ |
| b) $(\frac{7}{5})^4$ | e) $\frac{150^3}{30^4} = \frac{150^3}{30^3 \times 30} = 5^3 \times 30^{-1}$ |
| c) $\frac{6^6}{6^5} = 6^1 = 6$ | f) $(\frac{2}{3})^6$ |

4.4 Exercice 4**4-4/ Exercice 4**

Donner l'écriture scientifique des expressions suivantes :

- | | |
|-----------------------|--|
| a) 32500 | d) $0,72 \times 10^{-2}$ |
| b) 0,00425 | e) $\frac{10^3 \times 10^{-5}}{10^2}$ |
| c) $12,5 \times 10^3$ | f) $(3,2 \times 10^4) \times (2 \times 10^{-3})$ |

Correction Exercice 4

a) $3,25 \times 10^4$

b) $4,25 \times 10^{-3}$

c) $1,25 \times 10^4$

d) $7,2 \times 10^{-3}$

e) $10^{-4} = 1 \times 10^{-4}$

f) $6,4 \times 10^1$

4.5 Exercice 5**4-5/ Exercice 5**

a et b deux nombres relatifs non nuls.

1. Simplifier A :

$$A = \frac{ab^{-2}(a^2)^{-3}b \times [ab(a^{-4}b^3)^2]^{-1}}{a^{-2}b^2(a^{-4}b)^{-3} \times [(a^2b)^{-1}a]^{-2}}$$

2. Calculer A pour $a = 10^{-2}$ et $b = 10^3$

Correction Exercice 5

1. Simplification :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \cdot b^{-2} \cdot a^{-6} \cdot b \cdot [ab \cdot a^{-8}b^6]^{-1}}{a^{-2}b^2 \cdot a^{12}b^{-3} \cdot [a^{-2}b^{-1} \cdot a]^{-2}} \\ &= \frac{a^{-5}b^{-1} \cdot a^7b^{-7}}{a^{10}b^{-1} \cdot a^2b^2} = \frac{a^2b^{-8}}{a^{12}b^1} = a^{-10}b^{-9} \end{aligned}$$

2. Calcul avec valeurs :

$$A = (10^{-2})^{-10} \times (10^3)^{-9} = 10^{20} \times 10^{-27} = 10^{-7}$$

4.6 Exercice 6**4-6/ Exercice 6**

La distance moyenne de la Terre au Soleil est évaluée à 150 millions de km, et celle de la Terre à la Lune à $3,8 \times 10^5$ km (pour les calculs prendre l'ordre de grandeur de 4×10^5 km).

La longueur d'un pas de géant (de science-fiction) est celle de la distance Terre-Lune.

— Combien de pas doit-il faire pour aller de la Terre au Soleil ?

Correction Exercice 6

Distance Terre-Soleil : $1,5 \times 10^8$ km

Distance Terre-Lune : 4×10^5 km

Nombre de pas : $\frac{1,5 \times 10^8}{4 \times 10^5} = 0,375 \times 10^3 = 375$ pas

4.7 Exercice 7**4-7/ Exercice 7**

Soit n un entier relatif. Déterminer n dans les cas suivants :

1. $(-13)^n \times (-13)^3 = (-13)^{2n-1} \times (-39)^2$

2. $(-\frac{4}{5})^n \div \left((-\frac{4}{5})^2\right)^3 = (-\frac{64}{125})$

Correction Exercice 7

$$\begin{aligned} 1. \quad & (-13)^{n+3} = (-13)^{2n-1} \times (3 \times 13)^2 \\ & (-13)^{n+3} = (-13)^{2n-1} \times 9 \times 13^2 \\ & n+3 = 2n-1 \Rightarrow n=4 \\ 2. \quad & \left(-\frac{4}{5}\right)^n \div \left(-\frac{4}{5}\right)^6 = \left(-\frac{4}{5}\right)^3 \\ & \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-6} = \left(-\frac{4}{5}\right)^3 \\ & n-6 = 3 \Rightarrow n=9 \end{aligned}$$

Fin de la séance - À vos exercices !