

Ordre et opérations

Niveau : 2^{ème} Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Comparaison de nombres rationnels
 - 1-1. Notation
 - 1-2. Propriétés
- II. Ordre et opérations
 - 2-1. Ordre et addition/soustraction
 - 2-2. Ordre et multiplication
- III. Encadrement d'un nombre
- IV. Inéquations du premier degré
- V. Exercices

1 Comparaison de nombres rationnels

1.1 Notation

Notation

Pour deux nombres rationnels a et b :

- $a < b$: a strictement inférieur à b
- $a \leq b$: a inférieur ou égal à b
- $a > b$: a strictement supérieur à b
- $a \geq b$: a supérieur ou égal à b

1.2 Propriétés

Propriétés de comparaison

Pour $a, b \in \mathbb{Q}$:

- $a - b < 0 \Rightarrow a < b$
- $a - b > 0 \Rightarrow a > b$
- $a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Exemples

- Comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$:
 $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{1}{12} < 0$
 Donc $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$
- Comparer -2 et -3 :
 $-2 - (-3) = 1 > 0$
 Donc $-2 > -3$

2 Ordre et opérations

2.1 Ordre et addition/soustraction

Propriétés

Pour $a, b, c \in \mathbb{Q}$:

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$
- Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$

Exemple

On sait que $5 < 7$ et $2 < 4$, donc $5 + 2 < 7 + 4$ soit $7 < 11$

2.2 Ordre et multiplication

Propriétés

Pour $a, b, c \in \mathbb{Q}$:

- Si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$
- Si $a < b$ et $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$
- Pour $a, b, c, d > 0$, si $a < b$ et $c < d$ alors $a \times c < b \times d$

Exemple

- $3 < 5$ et $2 > 0$ $6 < 10$
- $3 < 5$ et $-2 < 0$ $-6 > -10$

3 Encadrement d'un nombre rationnel

Définition

Pour $a \leq b \leq c$, on dit que b est encadré par a et c .

Exemple

$2 \leq 3 \leq 5$ est un encadrement de 3.

Pour x tel que $-1 \leq x \leq 2$, alors :

- $-2 \leq 2x \leq 4$
- $-3 \leq x - 1 \leq 1$

4 Inéquations du premier degré

4.1 Vocabulaire

Définition

Une inéquation est une inégalité contenant une inconnue x .

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité.

4.2 Résolution

Méthode

1. Isoler les termes en x d'un côté
2. Simplifier
3. Diviser par le coefficient de x (en changeant le sens si coefficient négatif)

Exemple résolu

Résoudre $2x + 1 \geq -7$:

$$2x + 1 \geq -7$$

$$2x \geq -8$$

$$x \geq -4$$

Solution : $S = [-4, +\infty[$

5 Exercices

5.1 Exercice 1

Exercice 1

1. Comparer :
 - $\frac{8}{9}$ et $\frac{7}{3}$
 - $-\frac{6}{11}$ et $-\frac{5}{7}$
 - $\sqrt{34} + 5$ et $2\sqrt{5} + 1$
2. Pour $a \leq 3$ et $b \geq 2$, montrer que $a - b \leq 1$

Solution Exercice 1

1. — $\frac{8}{9} \approx 0.888$ et $\frac{7}{3} \approx 2.333$ $\frac{8}{9} < \frac{7}{3}$
 — $-\frac{6}{11} \approx -0.545$ et $-\frac{5}{7} \approx -0.714$ $-\frac{6}{11} > -\frac{5}{7}$
 — $\sqrt{34} + 5 \approx 10.83$ et $2\sqrt{5} + 1 \approx 5.472$ $\sqrt{34} + 5 > 2\sqrt{5} + 1$
2. $a \leq 3$ et $b \geq 2$ $-b \leq -2$
 Donc $a - b \leq 3 - 2 = 1$

5.2 Exercice 2

Exercice 2

Pour $x \geq y$, comparer :

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. $y - \frac{2}{3}$ et $x - 0,5$ | 3. $-5x$ et $-5y$ |
| 2. $-y + \frac{1}{7}$ et $-x + 9$ | 4. $-4x + 5$ et $-4y + 5$ |

Solution Exercice 2

1. $y - \frac{2}{3} \leq x - 0,5$ (car $y \leq x$ et $-\frac{2}{3} \approx -0.666 < -0.5$)
2. $-y \geq -x$ $-y + \frac{1}{7} \geq -x + \frac{1}{7} > -x + 9$ si $x > \frac{62}{7}$
3. $-5x \leq -5y$ (car on multiplie par $-5 < 0$)
4. $-4x \leq -4y$ $-4x + 5 \leq -4y + 5$

5.3 Exercice 3

Exercice 3

Pour $-9 \leq 2x + 3 \leq 7$ et $-\frac{7}{2} \leq 3y - \frac{1}{2} \leq -2$:

1. Montrer que $-6 \leq x \leq 2$
2. Montrer que $-2 \leq y \leq -\frac{1}{2}$

Solution Exercice 3

1. $-9 \leq 2x + 3 \leq 7$
 $\Rightarrow -12 \leq 2x \leq 4$
 $\Rightarrow -6 \leq x \leq 2$
2. $-\frac{7}{2} \leq 3y - \frac{1}{2} \leq -2$
 $\Rightarrow -3 \leq 3y \leq -\frac{3}{2}$
 $\Rightarrow -1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$

5.4 Exercice 4

Exercice 4

Pour $-5 \leq 3x + 1 \leq -2$ et $1 \leq y \leq 3$:

1. Montrer que $-2 \leq x \leq -1$
2. Encadrer : $2x, 3y, x + y, x - y, 2x + 3y - 5, -2x - 3y, xy$

Solution Exercice 4

1. $-5 \leq 3x + 1 \leq -2$
 $\Rightarrow -6 \leq 3x \leq -3$
 $\Rightarrow -2 \leq x \leq -1$
2. — $-4 \leq 2x \leq -2$
 — $3 \leq 3y \leq 9$
 — $-1 \leq x + y \leq 2$
 — $-5 \leq x - y \leq -2$
 — $-12 \leq 2x + 3y - 5 \leq 4$
 — $-9 \leq -2x - 3y \leq 1$
 — $-6 \leq xy \leq -1$

5.5 Exercice 5

Exercice 5

Pour $a \leq b$:

1. Montrer que $2a \leq a + b \leq 2b$
2. En déduire que $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

Solution Exercice 5

1. — $a \leq b \quad a + a \leq a + b \quad 2a \leq a + b$
 — $a \leq b \quad a + b \leq b + b \quad a + b \leq 2b$
2. En divisant par 2 : $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

5.6 Exercice 6

Exercice 6

Résoudre les inéquations :

1. $\frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{2}x$

2. $2x + 4 \geq 5(1 - x)$

3. $2(x - 4) < 3(2x - 1)$

4. $3x + 1 \geq 0$

5. $5(x + 1) + 5 \geq x + 5$

6. $3x - 5(2x + 4) < -5(x - 1) - 2(x + 1)$

7. $\frac{x+3}{4} - \frac{1+x}{2} > 0$

8. $\frac{1-x-3}{5} > \frac{x+5-2x}{2}$

9. $\frac{x-2}{5} - \frac{1-3x}{3} \geq \frac{x-1-2-3x}{15}$

Solution Exercice 6

1. $x \geq 4$

2. $x \geq \frac{1}{7}$

3. $x > -\frac{5}{4}$

4. $x \geq -\frac{1}{3}$

5. $x \geq -\frac{5}{4}$

6. $x > -\frac{23}{4}$

7. $x < 1$

8. $x < \frac{1}{3}$

9. $x \geq \frac{1}{2}$

Fin de la séance - Bon travail !