Triangle rectangle et cercle

Niveau : 2ème Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

1 Milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle

1.1 Propriété directe

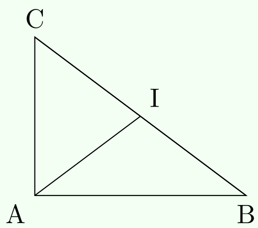
Propriété

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de son hypoténuse est équidistant des trois sommets du triangle.

Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en A, et I le milieu de [BC]. Alors :

$$IA = IB = IC$$



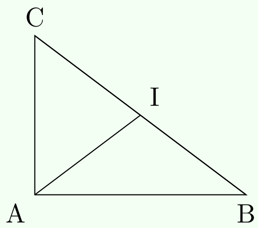
1.2 Propriété réciproque

Propriété

Si dans un triangle, le milieu d'un côté est équidistant des trois sommets, alors le triangle est rectangle en le sommet opposé à ce côté.

Exemple

Soit ABC un triangle avec I milieu de [BC]. Si IA = IB = IC, alors ABC est rectangle en A.



2 Cercle circonscrit à un triangle rectangle

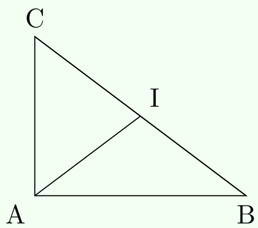
2.1 Propriété directe

Propriété

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

Exemple

ABC triangle rectangle en A, I milieu de [BC]. Alors I est centre du cercle circonscrit à ABC.



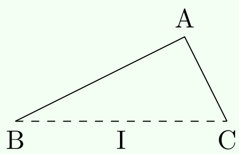
2.2 Propriété réciproque

Propriété

Si un triangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'un de ses côtés, alors il est rectangle au sommet opposé à ce côté.

Exemple

Si ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors ABC est rectangle en A.



3 Exercices

3.1 Exercice 1

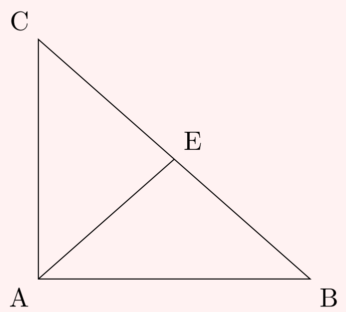
Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que BC = 8 cm, et E le milieu de [BC].

1. Tracer la figure.
2. Montrer que AEC est un triangle isocèle.
3. Déduire la longueur EA.

Solution Exercice 1

1. Figure :



2. ABC est rectangle en A, donc E (milieu de l'hypoténuse) est équidistant des trois sommets : EA = EB = EC. Ainsi, AEC a deux côtés égaux (EA = EC), donc c'est un triangle isocèle en E.
3. Comme EB = EC = BC/2 = 4 cm, alors EA = 4 cm.

3.2 Exercice 2

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en A avec $\widehat{ABC} = 20ř$, et I le milieu de [BC].

1. Calculer $\widehat{AIB}$.
2. Calculer $\widehat{IAH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Solution Exercice 2

1. Dans le triangle rectangle ABC, I est le centre du cercle circonscrit, donc IA = IB = IC. Le triangle IAB est isocèle en I, donc :
$$\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 20ř$$
$$\widehat{AIB} = 180ř - 20ř - 20ř = 140ř$$
2. H est le pied de la hauteur issue de A. Dans le triangle rectangle ABH :
$$\widehat{BAH} = 90ř - \widehat{ABC} = 70ř$$
Comme IA = IB (propriété du triangle rectangle), le triangle IAB est isocèle donc :
$$\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 20ř$$
Ainsi :
$$\widehat{IAH} = \widehat{BAH} - \widehat{IAB} = 70ř - 20ř = 50ř$$

3.3 Exercice 3

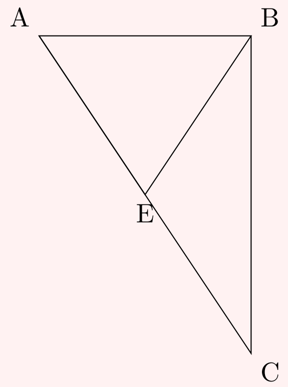
Exercice 3

Soit AEB un triangle isocèle en E avec $\widehat{EAB} = 50ř$, et C le symétrique de A par rapport à E.

1. Tracer la figure.
2. Montrer que ABC est rectangle.
3. Calculer $\widehat{ACB}$.

Solution Exercice 3

1. Figure :



2. AEB est isocèle en E, donc EA = EB. C est symétrique de A par E, donc E est milieu de [AC] et EA = EC. Ainsi, E est milieu de [AC] et EB = EA = EC, donc ABC est rectangle en B (d'après la réciproque).
3. Dans le triangle rectangle ABC :

$$\widehat{BAC} = 50ř$$

$$\widehat{ACB} = 90ř - 50ř = 40ř$$

3.4 Exercice 4

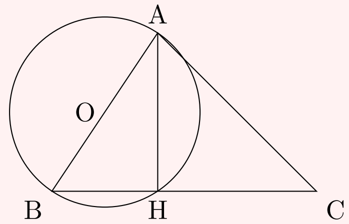
Exercice 4

ABC est un triangle et (AH) la hauteur relative à [BC]. Soit O le milieu de [AB].

1. Dessiner la figure.
2. Prouver que O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABH.

Solution Exercice 4

1. Figure :



2. Le triangle ABH est rectangle en H (car (AH) est hauteur). Or O est le milieu de l'hypoténuse [AB], donc O est le centre du cercle circonscrit à ABH (propriété directe).

Fin de la séance - Bon travail !