

Développement et Factorisation

Niveau : 3^e Année Collège - Tronc commun scientifique

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Objectifs du chapitre

- Maîtriser les techniques de développement
- Comprendre et appliquer les identités remarquables
- Acquérir les méthodes de factorisation
- Savoir factoriser avec les identités remarquables
- Résoudre des problèmes mettant en œuvre ces techniques

1 Développement

1.1 Définition

Définition

Développer : c'est transformer un produit en une somme ou en une différence.

1.2 Propriétés

Propriétés du développement

Soient a, b, c, d et k des nombres réels :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples

- $3(x + 2) = 3x + 6$
- $2(x - 5) = 2x - 10$
- $(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$

2 Développer avec les identités remarquables

Identités remarquables

0. Carré d'une somme : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
0. Carré d'une différence : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
0. Produit d'une somme par une différence : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemples

- $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $(3x + 4)(3x - 4) = 9x^2 - 16$

3 Factorisation**3.1 Définition****Définition**

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

3.2 Propriétés**Propriétés de factorisation**

Pour tous nombres réels a, b et k :

- $ka + kb = k(a + b)$
- $ka - kb = k(a - b)$

Méthode

Pour factoriser une expression :

0. Identifier le facteur commun
0. Mettre en évidence ce facteur commun

Exemples

- $3x + 6 = 3(x + 2)$
- $x^2 - 4x = x(x - 4)$
- $4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$

4 Factoriser avec les identités remarquables**Méthodes**

0. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
0. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
0. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

Exemples

- $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
- $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$
- $9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$

5 Exercices avec solutions

Exercice 1 : Développement

Développer et réduire les expressions suivantes :

0. $A = 3(2x - 1) - 4(2 - 3x) + 2(x + 1)$
0. $B = -13(3x + 6) + 15(25x - 5) - x$
0. $C = x^2(x^3 - x^2) - 3(x^5 + x^4)$
0. $D = (x - 1)(x^2 + x - 2)$
0. $E = (x + 2)^2 - (x - 3)^2 + (x - 1)(x + 1)$

Solution Exercice 1

0. $A = 6x - 3 - 8 + 12x + 2x + 2 = 20x - 9$
0. $B = -39x - 78 + 375x - 75 - x = 335x - 153$
0. $C = x^5 - x^4 - 3x^5 - 3x^4 = -2x^5 - 4x^4$
0. $D = x^3 + x^2 - 2x - x^2 - x + 2 = x^3 - 3x + 2$
0. $E = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 6x + 9) + (x^2 - 1) = x^2 + 10x - 6$

Exercice 2 : Factorisation

Factoriser les expressions suivantes :

0. $A = 4x^2 + 8x$
0. $B = 21x^5 + 14x^4 - 21x^3 - 35x$
0. $C = \frac{1}{a} - 2a^2 + \frac{1}{a^3}$
0. $D = (x + 1)(x - 3) - (x + 1)(2x - 1)$
0. $E = 25 + 10x + x^2$
0. $F = x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$
0. $G = 7x^2 - 7 + x^2 - 2x + 1$
0. $H = x^2 - 8x + 7$

Solution Exercice 2

0. $A = 4x(x + 2)$
0. $B = 7x(3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5)$
0. $C = \frac{1}{a^3}(1 - 2a^3 + a^2)$
0. $D = (x + 1)[(x - 3) - (2x - 1)] = (x + 1)(-x - 2)$
0. $E = (5 + x)^2$
0. $F = (x^2 + \frac{1}{2})^2$
0. $G = 8x^2 - 2x - 6 = 2(4x^2 - x - 3)$
0. $H = (x - 1)(x - 7)$

Exercice 3

On considère : $E = (2x + 3)^2 - (5 - x)^2$

0. Développer et réduire E
0. Factoriser E
0. Calculer E pour $x = 2$
0. Résoudre l'équation $3x^2 + 22x - 16 = 0$

Solution Exercice 3

- 0. $E = 4x^2 + 12x + 9 - (25 - 10x + x^2) = 3x^2 + 22x - 16$
- 0. $E = [(2x + 3) + (5 - x)][(2x + 3) - (5 - x)] = (x + 8)(3x - 2)$
- 0. Pour $x = 2$: $E = 3(4) + 22(2) - 16 = 12 + 44 - 16 = 40$
- 0. $3x^2 + 22x - 16 = 0$
Solutions : $x = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 192}}{6} = \frac{-22 \pm 26}{6}$
Donc $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -8$

Exercice 4

x est un nombre réel.

$$a = 25x^2 - 49 + (5x + 7)(-2x + 1)$$

$$b = x^2 - 4x + 4 - (x - 2)(7x + 3)$$

- 0. Développer et réduire a et b
- 0. Factoriser a et b
- 0. On pose $c = b - a$
- 0. Factoriser c

Solution Exercice 4

- 0. $a = 25x^2 - 49 - 10x^2 + 5x - 14x + 7 = 15x^2 - 9x - 42$
 $b = x^2 - 4x + 4 - (7x^2 + 3x - 14x - 6) = -6x^2 + 15x + 10$
- 0. $a = (5x + 7)(5x - 7) + (5x + 7)(-2x + 1) = (5x + 7)(3x - 6)$
 $b = (x - 2)^2 - (x - 2)(7x + 3) = (x - 2)(-6x - 1)$
- 0. $c = b - a = (-6x^2 + 15x + 10) - (15x^2 - 9x - 42) = -21x^2 + 24x + 52$
- 0. $c = -21x^2 + 24x + 52$ (ne se factorise pas simplement)

Exercice 5

Soit a un entier naturel non nul.

Écrire $2a^2 + 2$ comme somme de deux carrés d'entiers naturels.

Solution Exercice 5

$$2a^2 + 2 = (a^2 + 2a + 1) + (a^2 - 2a + 1) = (a + 1)^2 + (a - 1)^2$$