# Géométrie dans l'espace

*Niveau : 3e Année Collège*

**Prof : AIT MAMA MOHAMED**

## Sommaire



## 1 Orthogonalité dans l'espace

### 1.1 Définition

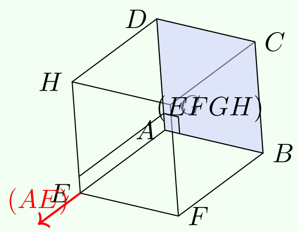
**Orthogonalité**

Une droite $(D)$ est perpendiculaire à un plan $(P)$ en $A$ si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de $(P)$ passant par $A$.

$$(D) \perp (P)$$

**Exemple**

Dans un cube $ABCDEFGH$, montrons que $(AE) \perp (EFGH)$ :




$(AE)$ est perpendiculaire à $(EF)$ et $(EH)$ qui sont deux droites sécantes de $(EFGH)$, donc $(AE) \perp (EFGH)$.

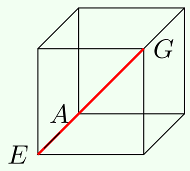
### 1.2 Propriété

Propriété

Si une droite est perpendiculaire à un plan en $A$, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par $A$.

**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrons que $AEG$ est rectangle en $E$ :




$(AE) \perp (EFGH)$ et $(EG) \subset (EFGH)$, donc $(AE) \perp (EG)$. Ainsi, le triangle $AEG$ est rectangle en $E$.

# 2 Parallélisme dans l'espace

## 2.1 Définition

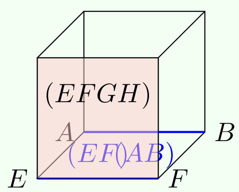
**Parallélisme**

Une droite $(D)$ est parallèle à un plan $(P)$ si elle est parallèle à une droite de $(P)$.

$$(D) \parallel (P)$$

**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrons que $(AB) \parallel (EFGH)$ :




$(AB) \parallel (EF) \subset (EFGH)$, donc $(AB) \parallel (EFGH)$.

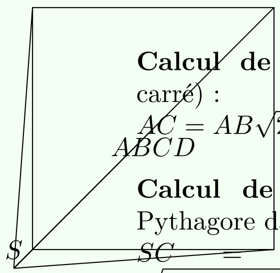
# 3 Théorème de Pythagore dans l'espace

**Théorème**

Dans un espace à trois dimensions, le théorème de Pythagore s'applique dans chaque plan contenant un triangle rectangle.

**Exemple**

Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée $ABCD$ avec $AB = 4$ cm et $SA = 6$ cm.




**Calcul de** $AC$ (diagonale du carré) :
$AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm

**Calcul de** $SC$ (théorème de Pythagore dans $SAC$) :
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 + 32} = \sqrt{68} \approx 8.25$ cm

# 4 Agrandissement - Réduction

## 4.1 Définition

**Agrandissement-Réduction**

En multipliant toutes les dimensions d'un solide par un facteur $k > 0$, on obtient :
- Un **agrandissement** si $k > 1$
- Une **réduction** si $0 < k < 1$

## 4.2 Propriété

**Propriétés**

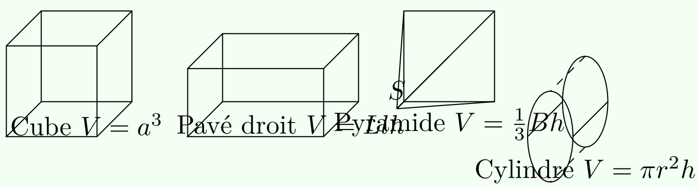
Pour un rapport $k$ :
- Longueurs : multipliées par $k$
- Aires : multipliées par $k^2$
- Volumes : multipliées par $k^3$

# 5 Les volumes

**Formules de volume**

- **Cube** : $V = a^3$, $A_{\text{total}} = 6a^2$
- **Pavé droit** : $V = Llh$, $A_{\text{total}} = 2(Ll + Lh + lh)$
- **Pyramide** : $V = \frac{1}{3}\text{Aire}_{\text{base}}h$
- **Cylindre** : $V = \pi r^2 h$, $A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h)$

**Exemples**




# 6 Exercices

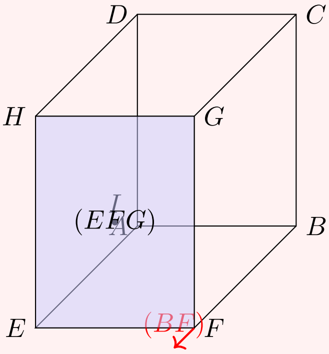
## 6.1 Exercice 1

**Exercice 1**

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède avec $AB = 3$, $BC = 4$, $AE = 5$.

0. Calculer $CH$ et $EG$
0. Soit $I$ le centre de $EFGH$
0. Montrer que $(BF) \perp (EFG)$
0. En déduire que $(BF) \perp (IF)$
0. Calculer $IB$

**Solution Exercice 1**

0. $CH = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
   $EG = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
0. 

0. $(BF) \perp (EF)$ et $(BF) \perp (FG)$, donc $(BF) \perp (EFG)$
0. Comme $(IF) \subset (EFG)$, alors $(BF) \perp (IF)$
0. $IB = \sqrt{1.5^2+2^2+5^2} = \sqrt{2.25+4+25} = \sqrt{31.25} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

## 6.2 Exercice 2

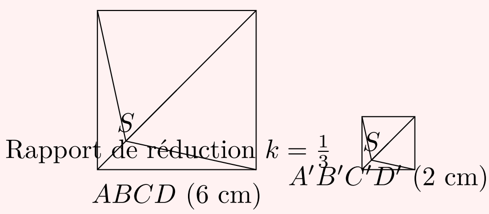
**Exercice 2 (Pyramides)**

Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée $ABCD$ avec $SO = 5$ cm, $AB = 6$ cm.
La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction avec $A'B' = 2$ cm.

0. Calculer l'aire de $ABCD$
0. Calculer le volume de $SABCD$
0. Trouver le coefficient de réduction
0. Calculer le volume de $SA'B'C'D'$

**Solution Exercice 2**

0. Aire de $ABCD = 66 = 36$ cm²
0. Volume $SABCD = \frac{1}{3}365 = 60$ cm³
0. Coefficient $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
0. Volume $SA'B'C'D' = 60(\frac{1}{3})^3 = \frac{60}{27} \approx 2.22$ cm³




## 6.3 Exercice 5

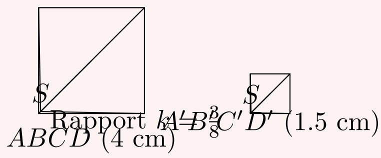
**Exercice 5 (Pyramide régulière)**

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée ($AB = 4$ cm) de sommet $S$.
$SA'B'C'D'$ est une réduction avec $A'B' = 1.5$ cm et $SO = 5$ cm.

0. Calculer le coefficient de réduction
0. Calculer le volume de $SA'B'C'D'$

**Solution Exercice 5**

0. Coefficient $k = \frac{1.5}{4} = \frac{3}{8}$
0. Volume original $SABCD = \frac{1}{3}165 = \frac{80}{3}$ cm³
   Volume réduit $SA'B'C'D' = \frac{80}{3}(\frac{3}{8})^3 = \frac{80}{3}\frac{27}{512} = \frac{45}{32} \approx 1.41$ cm³




## 6.4 Exercice 6

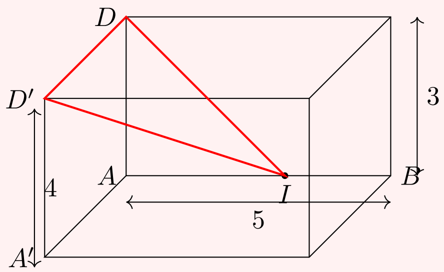
**Exercice 6 (Pavé droit)**

$ABCDA'B'C'D'$ est un pavé droit avec $AB = 5$, $BC = 3$, $AA' = 4$.
$I$ est un point de $[AB]$ tel que $IB = 2$.

0. Montrer que $(DD') \perp (ABC)$
0. En déduire la nature du triangle $IDD'$
0. Calculer $ID'$

**Solution Exercice 6**

0. $(DD')$ est parallèle à $(AA')$ qui est perpendiculaire à $(ABC)$, donc $(DD') \perp (ABC)$
0. $IDD'$ est rectangle en $D$
0. $ID = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
   $ID' = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{18 + 16} = \sqrt{34} \approx 5.83$




www.massar360.com