Repère dans le plan

Niveau : 3e Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

1 Les coordonnées d'un point

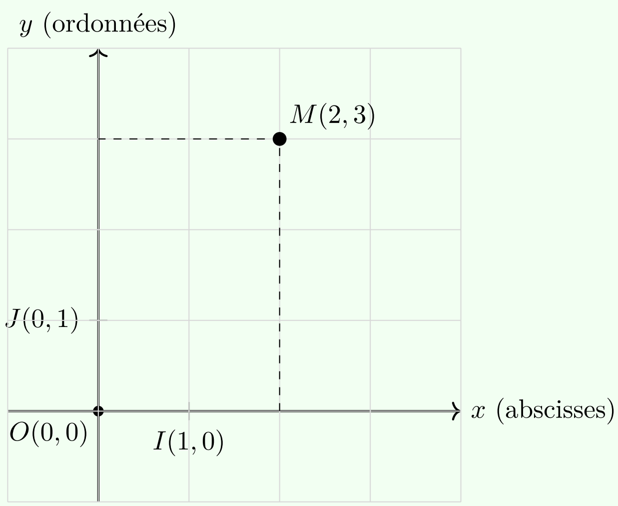
1.1 Repère Orthonormé du Plan

Repère Orthonormé

Un repère orthonormé est un ensemble de deux axes gradués avec la même unité (OI=OJ=1 unité), perpendiculaires et ayant la même origine.

— Noté $(O; I; J)$
— (OI) : axe des abscisses
— (OJ) : axe des ordonnées
— O : origine du repère

Exemple



Dans ce repère :

— $O(0; 0)$, $I(1; 0)$, $J(0; 1)$
— $M(2; 3)$ a pour abscisse 2 et ordonnée 3

1.2 Coordonnées d'un point

Définition

Dans un repère $(O; I; J)$, tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x_M; y_M)$ appelé coordonnées du point :

- x_M : abscisse
- y_M : ordonnée

1.3 Coordonnées du milieu d'un segment

Milieu d'un segment

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

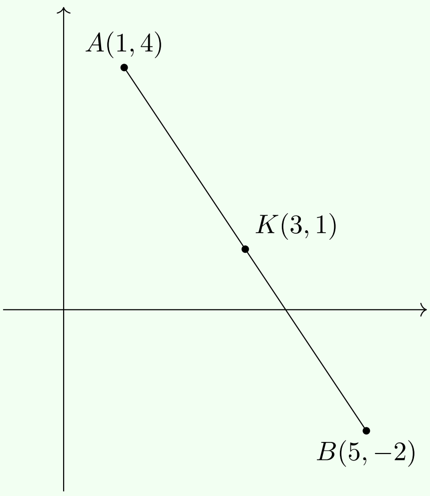
Exemple

Soient $A(1; 4)$ et $B(5; -2)$. Calculons les coordonnées du milieu K :

$$x_K = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$y_K = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

Donc $K(3; 1)$.



2 Les coordonnées d'un vecteur

2.1 Propriété 1 (Coordonnées d'un vecteur)

Coordonnées d'un vecteur

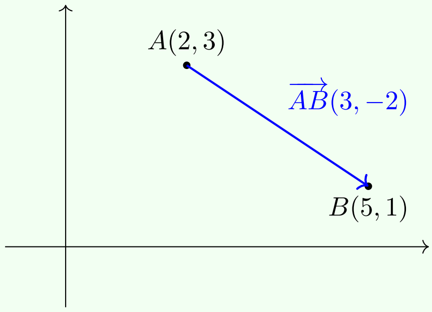
Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemple

Soient $A(2;3)$ et $B(5;1)$. Calculons $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}(5-2;1-3)=(3;-2)$$



2.2 Propriété 2 (Égalité de vecteurs)

Égalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-x_D=x_B-x_A\\ y_C-y_D=y_B-y_A\end{cases}$$

2.3 Propriété 3 (Opérations sur les vecteurs)

Opérations

Pour $\overrightarrow{AB}(x;y)$ et $\overrightarrow{CD}(x';y')$:

- Somme : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(x+x';y+y')$
- Produit par un réel : $k\overrightarrow{AB}(kx;ky)$

3 La distance entre deux points

Distance

Dans un repère orthonormé, la distance entre $E(x_E;y_E)$ et $F(x_F;y_F)$ est :

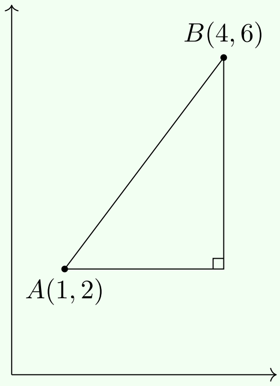
$$EF=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}$$

Conséquence : Si $\overrightarrow{AB}(x;y)$, alors $AB=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple

Calculons la distance entre $A(1;2)$ et $B(4;6)$:

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



4 Exercices

4.1 Exercice 1

Exercice 1

Calculer les coordonnées des vecteurs :

— $\overrightarrow{AB}$ avec $A(-2;3)$ et $B(5;1)$

— $\overrightarrow{CD}$ avec $C(-6.5;-2)$ et $D(-8;-3.2)$

— $\overrightarrow{EF}$ avec $E(\frac{2}{3};\frac{5}{2})$ et $F(-\frac{1}{4};-\frac{7}{4})$

Solution Exercice 1

— $\overrightarrow{AB}(5-(-2);1-3) = (7;-2)$

— $\overrightarrow{CD}(-8-(-6.5);-3.2-(-2)) = (-1.5;-1.2)$

— $\overrightarrow{EF}(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3};-\frac{7}{4}-\frac{5}{2}) = (-\frac{11}{12};-\frac{17}{4})$

4.2 Exercice 3

Exercice 3

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;1)$, $B(0;4)$ et $C(-6;-4)$.

0. Calculer AB, AC et BC
0. Montrer que ABC est rectangle
0. Trouver le centre et le rayon du cercle circonscrit

Solution Exercice 3

0. Calcul des distances :
   — $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$
   — $AC = \sqrt{(-6-4)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
   — $BC = \sqrt{(-6-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{36+64} = 10$
0. Vérification du triangle rectangle :

$$AB^2 + BC^2 = 25 + 100 = 125$$

$$AC^2 = 125$$

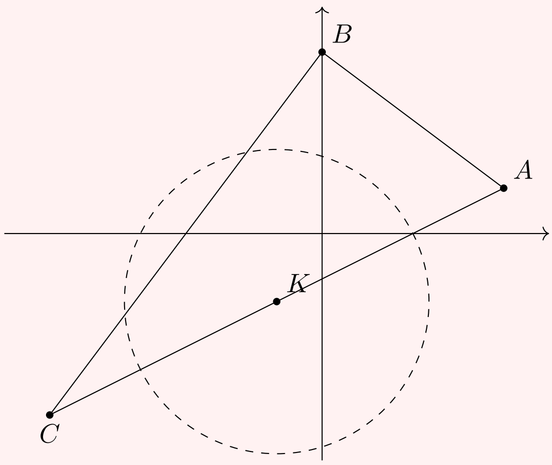
Donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ABC est rectangle en B (théorème de Pythagore)

0. Cercle circonscrit :
   — Centre : milieu de l'hypoténuse [AC]

$$x_K = \frac{4+(-6)}{2} = -1$$

$$y_K = \frac{1+(-4)}{2} = -1.5$$

   — Rayon : $\frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$



[Continuer avec les solutions des autres exercices de la même manière...]