

# Ordre et Opérations

Niveau : 3<sup>e</sup> Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

## Objectifs du chapitre

- Comparer des nombres réels
- Maîtriser les règles d'ordre avec les opérations
- Effectuer des encadrements précis
- Résoudre des inégalités

## 1 Comparaison de nombres réels

### 1.1 Propriété fondamentale

#### Comparaison par différence

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels :

- Si  $a - b < 0$  alors  $a < b$
- Si  $a - b > 0$  alors  $a > b$
- Si  $a - b = 0$  alors  $a = b$

#### Exemple

Comparons  $\frac{2}{5}$  et  $\frac{5}{7}$  :

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{7} = \frac{14}{35} - \frac{25}{35} = -\frac{11}{35} < 0$$

Donc  $\frac{2}{5} < \frac{5}{7}$ .

## 2 Ordre et opérations

### 2.1 Addition et soustraction

#### Propriétés

- Si  $a < b$  alors  $a + c < b + c$  (même avec  $c < 0$ )
- Si  $a < b$  et  $c < d$  alors  $a + c < b + d$

#### Exemples

- Comparons  $3 + \sqrt{7}$  et  $8 + \sqrt{7}$  :  
On a  $3 < 8$  donc  $3 + \sqrt{7} < 8 + \sqrt{7}$
- Si  $x > 3$ , alors  $x - 5 > 3 - 5$  donc  $x - 5 > -2$

## 2.2 Multiplication

### Propriétés cruciales

- Si  $a < b$  et  $c > 0$  alors  $ac < bc$
- Si  $a < b$  et  $c < 0$  alors  $ac > bc$  (l'ordre s'inverse)
- Pour  $a, b, c, d > 0$ , si  $a < b$  et  $c < d$  alors  $ac < bd$

### Exemple important

Soit  $x < 3$ , comparons  $-4x$  et  $-12$  :

$$x < 3 \text{ et } -4 < 0 \Rightarrow -4x > -12$$

## 2.3 Inverse

### Propriété

Pour  $a, b$  de même signe :

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

L'ordre s'inverse quand on prend les inverses.

### Exemples

- $3 < 8 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{8}$
- $-8 < -3 \Rightarrow -\frac{1}{8} > -\frac{1}{3}$

## 2.4 Carré et racine carrée

### Propriétés

- Pour  $a, b > 0$  :  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
- Pour  $a, b < 0$  :  $a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- Pour  $a, b \geq 0$  :  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

### Exemples

- Comparons  $3\sqrt{5}$  et  $\sqrt{41}$  :  
 $(3\sqrt{5})^2 = 45$  et  $(\sqrt{41})^2 = 41$  donc  $3\sqrt{5} > \sqrt{41}$
- $\sqrt{15} < \sqrt{23}$  car  $15 < 23$

## 3 Encadrements

### 3.1 Opérations sur les encadrements

#### Addition

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } a + c \leq x + y \leq b + d$$

**Multiplication**Pour  $x, y > 0$  :

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } ac \leq xy \leq bd$$

**Inverse**Pour  $x > 0$  :

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ alors } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$$

**Exemple complet**Soient  $3 \leq x \leq 8$  et  $-4 \leq y \leq 2$  :

- $x + y \in [3 - 4, 8 + 2] = [-1, 10]$
- $xy$  : cas complexe car  $y$  change de signe
- $\frac{1}{x} \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{3}]$

**4 Exercices avec solutions****Exercice 1 : Comparaisons**

Comparer :

- $\frac{3}{7}$  et  $\frac{7}{5}$
- $\sqrt{8}$  et 3
- $-\sqrt{3}$  et  $-\sqrt{5}$
- $2\sqrt{5}$  et 5
- $2\sqrt{3}$  et  $\sqrt{11}$
- $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$  et  $\sqrt{17} + \sqrt{10}$

**Solution Exercice 1**

- $\frac{3}{7} \approx 0.428 < \frac{7}{5} = 1.4$
- $\sqrt{8} \approx 2.828 < 3$
- $-\sqrt{3} \approx -1.732 > -\sqrt{5} \approx -2.236$
- $2\sqrt{5} \approx 4.472 > 5$ ? Non :  $(2\sqrt{5})^2 = 20 < 25$
- $(2\sqrt{3})^2 = 12 > 11$
- On retire  $\sqrt{10}$  :  $3\sqrt{2} \approx 4.242 > \sqrt{17} \approx 4.123$

**Exercice 4 : Démonstrations**

- Pour  $x \geq 2$ , comparer  $A = (x - 1)^2$  et  $B = (x - 2)^2$
- Démontrer que  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$  pour  $a, b > 0$

**Solution Exercice 4**

- $A - B = (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) = 2x - 3$   
Pour  $x \geq 2$ ,  $2x - 3 \geq 1 > 0$  donc  $A > B$
- Élevons au carré :  
 $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$   
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$   
Donc  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

**Exercice 6 : Inégalité**Pour  $a > 2$  et  $b > 2$ , démontrer que  $ab > a + b$

**Solution Exercice 6**

$$ab - a - b = a(b - 1) - b > 2(b - 1) - b = b - 2 > 0$$

Donc  $ab > a + b$ .

[www.massar360.com](http://www.massar360.com)