

Systemes de 2 équations à 2 inconnues

Niveau : 3^e Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Système de 2 équations du premier degré
- II. Résolution algébrique
- III. Résolution graphique
- IV. Résolution de problèmes
- V. Exercices

1 Système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues

1.1 Définition

Systeme d'équations

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y s'écrit :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

1.2 Exemples

Exemples de systèmes

- $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ -3x - 4y = -2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = \frac{2}{3} \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y^2 - 1 = 0 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$ (non linéaire)

2 Résolution algébrique d'un système

2.1 Définition

Solution d'un système

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples $(x; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

2.2 Méthodes de résolution

Méthode par substitution

Étapes :

0. Exprimer une inconnue en fonction de l'autre
0. Substituer dans la seconde équation
0. Résoudre l'équation obtenue
0. Trouver la seconde inconnue

Exemple :

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

1. On exprime y : $y = 3x - 1$
 2. On substitue : $2x + 3(3x - 1) = 19$
 3. On résout : $11x - 3 = 19 \Rightarrow x = 2$
 4. On trouve y : $y = 3(2) - 1 = 5$
- Solution : (2;5)

Méthode par combinaison linéaire

Étapes :

0. Multiplier les équations pour égaliser les coefficients
0. Additionner/soustraire pour éliminer une inconnue
0. Résoudre l'équation obtenue
0. Trouver la seconde inconnue

Exemple :

$$\begin{cases} -5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

1. On multiplie la 2ème équation par 2
 2. On additionne : $-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$
 3. On résout : $x = 1$
 4. On trouve y : $3(1) - 2y = 1 \Rightarrow y = 1$
- Solution : (1;1)

3 Résolution graphique d'un système

Interprétation graphique

Un système représente deux droites dans le plan :

- **Cas 1** : Droites sécantes (1 solution)
- **Cas 2** : Droites confondues (solutions)
- **Cas 3** : Droites parallèles (0 solution)

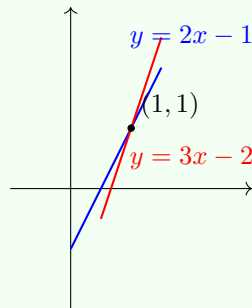
Exemple graphique

Systeme :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + y = -2 \end{cases}$$

Équations réduites :

$$(D) : y = 2x - 1 \quad (\Delta) : y = 3x - 2$$



Solution unique : (1;1)

4 Résolution de problèmes

Méthodologie

Étapes :

0. Choix des inconnues
0. Mise en équations
0. Résolution du système
0. Vérification et conclusion

Exemple de problème

Énoncé : Un musée propose un tarif adulte à 9DH et enfant à 5DH. Pour 70 visiteurs, la recette est de 510DH. Trouver le nombre d'adultes et d'enfants.

Solution :

- Inconnues : x = nombre d'adultes, y = nombre d'enfants
- Système :

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 9x + 5y = 510 \end{cases}$$

- Résolution (par substitution) :

$$y = 70 - x \quad 9x + 5(70 - x) = 510 \Rightarrow 4x = 160 \Rightarrow x = 40 \quad y = 70 - 40 = 30$$

- Solution : 40 adultes et 30 enfants

5 Exercices

5.1 Exercice 1

Exercice 1 (Substitution)

Résoudre par substitution :

$$0. \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$0. \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

$$0. \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ -4x - 2y = -14 \end{cases}$$

Solution Exercice 1

0.

$$y = \frac{x+3}{2}$$

$$2x - 4\left(\frac{x+3}{2}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 4$$

Pas de solution

0.

$$y = 5 - 3x$$

$$2x - 5(5 - 3x) = 9 \Rightarrow 17x = 34 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 5 - 3(2) = -1$$

Solution : (2; -1)

0.

$$y = 7 - 2x$$

$$-4x - 2(7 - 2x) = -14 \Rightarrow 0 = 0$$

Infinité de solutions (x; 7 - 2x)

5.2 Exercice 5

Exercice 5

On considère le système :

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$$

0. Le couple (5; 2) est-il solution?

0. Résoudre (S)

$$0. \text{ Résoudre } \begin{cases} \sqrt{x} + 2y^2 = 9 \\ \sqrt{x} + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

Solution Exercice 5

0. Vérification :

$$5 + 2(2) = 9 \text{ et } 5 + 3(2) = 11 \neq 13$$

Non solution

0. Résolution :

$$(L2) - (L1) : y = 4$$

$$x + 2(4) = 9 \Rightarrow x = 1$$

Solution : (1; 4)

0. On pose $X = \sqrt{x}$ et $Y = y^2$:

$$\begin{cases} X + 2Y = 9 \\ X + 3Y = 13 \end{cases}$$

Solution : $X = 1, Y = 4$

Donc $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

et $y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -2$

Solutions : (1; 2) et (1; -2)

5.3 Exercice 7

Exercice 7 (Problème)

À la terrasse d'un café :

— Othman : 4 cafés et 3 jus \rightarrow 123 DH

— Ayoub : 3 cafés et 1 jus \rightarrow 61 DH

Trouver le prix d'un café et d'un jus.

Solution Exercice 7

— Inconnues : $x =$ prix café, $y =$ prix jus

— Système :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 123 \\ 3x + y = 61 \end{cases}$$

— Résolution :

$$y = 61 - 3x$$

$$4x + 3(61 - 3x) = 123 \Rightarrow -5x = -60 \Rightarrow x = 12$$

$$y = 61 - 3(12) = 25$$

— Solution : **Café 12 DH, Jus 25 DH**