

Théorème de Pythagore

Niveau : 3^e Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Objectifs du chapitre

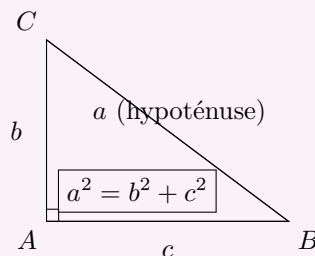
- Maîtriser le théorème de Pythagore et sa réciproque
- Savoir calculer des longueurs dans un triangle rectangle
- Démontrer qu'un triangle est rectangle
- Résoudre des problèmes géométriques complexes

1 Théorème de Pythagore direct

1.1 Énoncé du théorème

Théorème de Pythagore

Dans un triangle **rectangle**, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



1.2 Utilisation du théorème

Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AB = 7$ cm et $AC = 3$ cm.
Calculer BC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$7^2 = 3^2 + BC^2$$

$$49 = 9 + BC^2$$

$$BC^2 = 40$$

$$BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

2 Réciproque du théorème de Pythagore

2.1 Énoncé de la réciproque

Réciproque de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle (l'angle droit est opposé au plus grand côté).

2.2 Utilisation de la réciproque

Exemple

Soit ABC un triangle tel que :

$$AB = \sqrt{7} \text{ cm}, \quad AC = 2 \text{ cm}, \quad BC = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Vérifions :

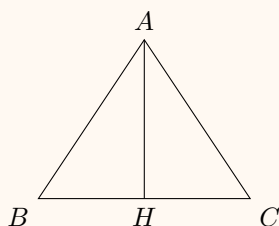
$$AB^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$AC^2 + BC^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 + 3 = 7$$

Comme $AB^2 = AC^2 + BC^2$, le triangle est rectangle en C .

3 Exercices avec solutions

Exercice 1



On donne $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$.

- Calculer AH
- Calculer BH

Solution Exercice 1

- En utilisant la formule de l'aire :

$$\text{Aire} = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

Calculons d'abord l'aire avec la formule de Héron :

$$p = \frac{5 + 4 + 6}{2} = 7.5$$

$$\text{Aire} = \sqrt{7.5(7.5 - 5)(7.5 - 4)(7.5 - 6)} = \sqrt{7.5 \cdot 2.5 \cdot 3.5 \cdot 1.5} \approx 9.92$$

$$AH = \frac{2\text{Aire}}{BC} \approx \frac{19.84}{6} \approx 3.31 \text{ cm}$$

- BH avec Pythagore dans ABH :

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} \approx \sqrt{25 - 10.96} \approx \sqrt{14.04} \approx 3.75 \text{ cm}$$

Exercice 2

Les triangles suivants sont-ils rectangles ? Justifier.

- $AB = \sqrt{5}$ cm, $AC = \sqrt{8}$ cm, $BC = \sqrt{13}$ cm
- $AB = \sqrt{13}$ cm, $AC = \sqrt{21}$ cm, $BC = \sqrt{29}$ cm

Solution Exercice 2

- Premier triangle :

$$(\sqrt{13})^2 = 13$$

$$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{8})^2 = 5 + 8 = 13$$

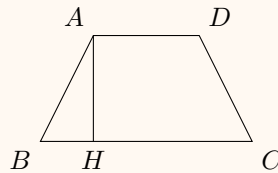
Le triangle est rectangle (en A).

- Deuxième triangle :

$$(\sqrt{29})^2 = 29$$

$$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{21})^2 = 13 + 21 = 34 \neq 29$$

Le triangle n'est pas rectangle.

Exercice 4

BCD est un trapèze rectangle en B et C avec $AB = 4$, $BC = 2$, $CD = 5$.

- Montrer que $AC = 2\sqrt{5}$
- Calculer AD
- Montrer que ADC est rectangle

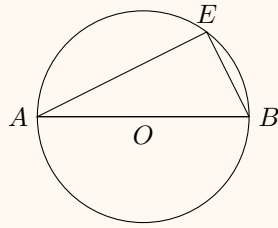
Solution Exercice 4

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $CH = CD - AB = 5 - 4 = 1$
 $AH = BC = 2$
 $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
- Vérifions Pythagore pour ADC :

$$AC^2 = 20$$

$$AD^2 + CD^2 = 5 + 25 = 30 \neq 20$$

Erreur dans l'énoncé ou l'interprétation de la figure.

Exercice 6

(C) est un cercle de diamètre $[AB]$ avec $AB = 10$. E est un point du cercle avec $AE = 8$.

- Démontrer que AEB est rectangle en E
- Calculer BE
- Calculer EO (O centre du cercle)

Solution Exercice 6

- Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle, donc AEB est rectangle en E .
- $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$
- EO est le rayon : $EO = \frac{AB}{2} = 5$

www.massar360.com