

Triangle rectangle et trigonométrie

Niveau : 3^e Année Collège

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Objectifs du chapitre

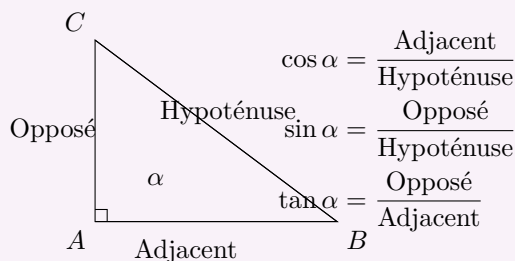
- Maîtriser les rapports trigonométriques
- Utiliser le cosinus, sinus et tangente
- Connaître les valeurs remarquables
- Résoudre des problèmes géométriques

1 Cosinus, sinus et tangente

1.1 Définitions fondamentales

Rapports trigonométriques

Dans un triangle rectangle :



Exemple

Pour un triangle rectangle en A avec $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$:

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$$

2 Formules trigonométriques

2.1 Relations fondamentales

Propriétés clés

Pour tout angle aigu α :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$ (angles complémentaires) :

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$$

2.2 Valeurs remarquables

Tableau des angles particuliers

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Ind.

3 Exercices avec solutions

Exercice 1

ABC est un triangle tel que $AB = \sqrt{3}$, $AC = 1$, $BC = 2$.

- Prouver que ABC est rectangle
- Calculer $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{B}$, $\tan \hat{B}$
- Déduire la mesure de $\hat{B}$

Solution Exercice 1

- $AB^2 + AC^2 = 3 + 1 = 4 = BC^2$ donc rectangle en A (Pythagore)
- $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$
- $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\hat{B} = 30^\circ$ (angle connu)

Exercice 2

ABC rectangle en A avec $\sin \hat{B} = \frac{3}{5}$ et $BC = 15$ cm.

- Calculer $\cos \hat{B}$ et $\tan \hat{B}$
- Calculer AB et AC

Solution Exercice 2

$$\begin{aligned}
 - \cos^2 \widehat{B} &= 1 - \sin^2 \widehat{B} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\
 \cos \widehat{B} &= \frac{4}{5} \\
 \tan \widehat{B} &= \frac{\sin}{\cos} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \\
 - \cos \widehat{B} &= \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 15 \frac{4}{5} = 12 \text{ cm} \\
 \sin \widehat{B} &= \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = 15 \frac{3}{5} = 9 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Exercice 4

Pour un angle α aigu :

- Calculer $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ si $\sin \alpha = \frac{5}{7}$
- Calculer $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$ si $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
- Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ si $\tan \alpha = 6$

Solution Exercice 4

$$\begin{aligned}
 - \cos \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \\
 \tan \alpha &= \frac{5/7}{2\sqrt{6}/7} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \\
 - \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \\
 \tan \alpha &= \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \\
 - \tan \alpha &= 6 = \frac{\sin}{\cos} \\
 \sin^2 + \cos^2 &= 1 \\
 \text{Posons } \cos &= x, \text{ alors } \sin = 6x \\
 x^2 + 36x^2 &= 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{37}} \\
 \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{37}}, \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}
 \end{aligned}$$

Exercice 6

Pour un triangle d'angles a, b, c :

$$\cos^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{c}{2} \right) = 1$$

Solution Exercice 6

Dans un triangle, $a + b + c = 180^\circ$ donc $\frac{a+b}{2} = 90^\circ - \frac{c}{2}$

Ainsi :

$$\cos^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) = \cos^2 \left(90^\circ - \frac{c}{2} \right) = \sin^2 \left(\frac{c}{2} \right)$$

Donc :

$$\sin^2 \left(\frac{c}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{c}{2} \right) = 1$$