# Vecteurs et translation

*Niveau : 3e Année Collège*

**Prof : AIT MAMA MOHAMED**

**Objectifs du chapitre**

- Maîtriser les notions de vecteurs et leurs propriétés
- Comprendre et appliquer la relation de Chasles
- Effectuer des translations et déterminer des images de figures
- Résoudre des problèmes géométriques avec les vecteurs

## 1 Les vecteurs

### 1.1 Vocabulaire et définitions

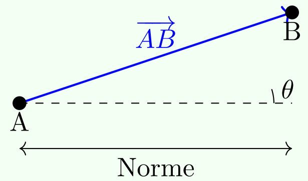
**Définition d'un vecteur**

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- **Direction** : celle de la droite (AB)
- **Sens** : de A vers B
- **Norme** : longueur AB

Le vecteur nul est noté $\vec{0}$ : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

**Exemple**




Ce vecteur a :

- Direction : angle $\theta \approx 18°$ avec l'horizontale
- Sens : de A vers B
- Norme : $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ unités

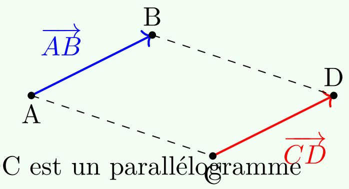
## 1.2 Égalité de vecteurs

**Propriété**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :
- (AB) ∥ (CD) (même direction)
- Même sens
- AB = CD (même longueur)

Si les points ne sont pas alignés, ABDC est un parallélogramme.

**Exemple**




ABDC est un parallélogramme

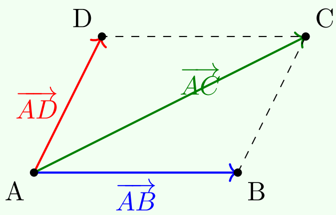
On vérifie que :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- AB = CD = $\sqrt{5}$
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

## 1.3 Somme de vecteurs

**Définition**

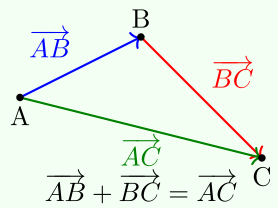
La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ où ABCD est un parallélogramme (règle du parallélogramme).
**Relation de Chasles** : Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**Exemple**




$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

**Relation de Chasles** :




$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

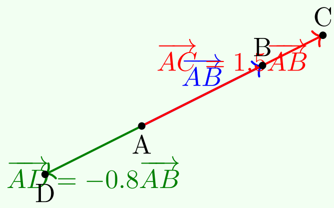
### 1.4 Produit par un réel

**Définition**

Pour $k \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ :

- Si $k > 0$ : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ même sens
- Si $k < 0$ : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ sens opposé
- La norme est multipliée par $|k|$

**Exemple**




On observe que :

- AC = 1.5 AB (même sens)
- AD = 0.8 AB (sens opposé)

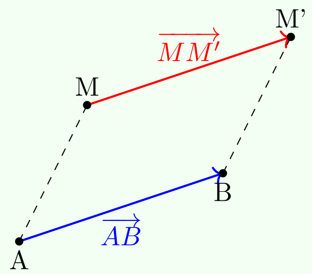
## 2 La translation

### 2.1 Image d'un point

**Définition**

$M'$ est l'image de $M$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ (ABM'M parallélogramme).

**Exemple**




ABM'M est un parallélogramme

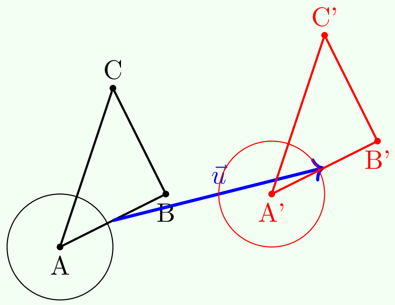
On a bien $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, donc M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

### 2.2 Image des figures

**Propriétés**

- L'image d'une droite est une droite parallèle
- L'image d'un segment est un segment de même longueur
- L'image d'un angle est un angle de même mesure
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon

**Exemple**




La translation conserve les longueurs, angles et formes

On observe que :
- (A'B') ∥ (AB)
- A'B' = AB
- $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$
- Le cercle de centre A' a même rayon (1cm)

# 3 Exercices avec solutions

## 3.1 Exercice 3 - Construction et démonstration

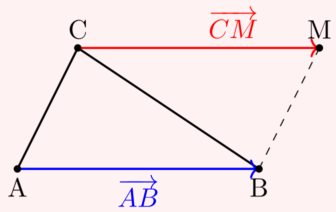
**Exercice 3**

ABC est un triangle.

0. Construire M image de C par la translation de A vers B
0. Construire N tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
0. Montrer que C est milieu de [MN]

**Solution Exercice 3**

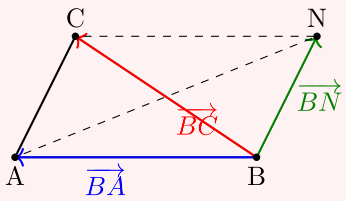
0. **Construction de M** :




ABMC est un parallélogramme

Par définition, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ donc M est bien l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

0. **Construction de N** :




On construit N en utilisant la relation $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (règle du parallélogramme).

0. **Démonstration** :
   - $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA}$ (car $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$)
   - $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BA}$ (car $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$)
   - Donc $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CN}$ C est milieu de [MN]

## 3.2 Exercice 5 - Alignement de points

**Exercice 5**

Soient A, B, C, D des points du plan.

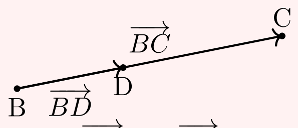
0. Prouver que B, C, D alignés si $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
0. Prouver que A, C, D alignés si $7\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BD}$

## Solution Exercice 5

0. **Partie 1** :

$$5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$
$$5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = 3\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$
$$5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$
$$5\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires  B, C, D alignés.

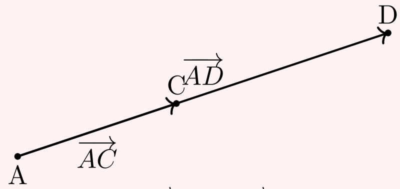



$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

0. **Partie 2** :

$$7\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BD}$$
$$7(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 4\overrightarrow{BA} + 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$
$$7\overrightarrow{BA} + 7\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$$
$$7\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AD} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires  A, C, D alignés.




$\overrightarrow{AD} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AC}$