

Calcul Intégral

Niveau : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Intégrale d'une fonction continue
- II. Propriétés des intégrales
- III. Valeur moyenne
- IV. Intégration par parties
- V. Applications géométriques
- VI. Exercices avec solutions

1 Intégrale d'une fonction continue

1.1 Définition

Définition

Soit f continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. L'intégrale de f de a à b est :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Exemple

Calculer $\int_1^2 3x^2 dx$:

$$[x^3]_1^2 = 8 - 1 = 7$$

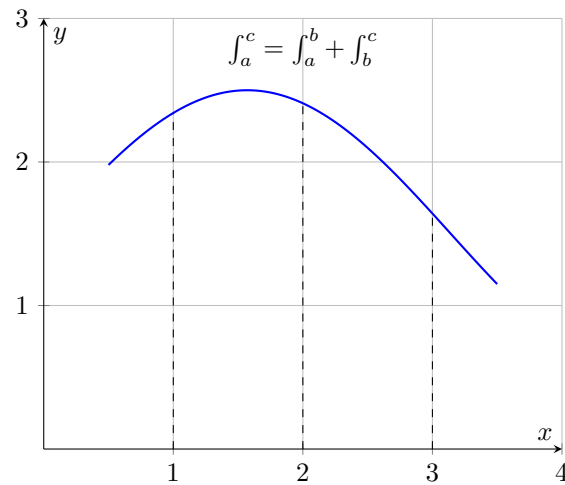
2 Propriétés des intégrales

2.1 Relation de Chasles

Relation de Chasles

Pour f continue sur $[a, c]$ et $b \in [a, c]$:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



2.2 Linéarité

Linéarité

Pour f, g continues sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

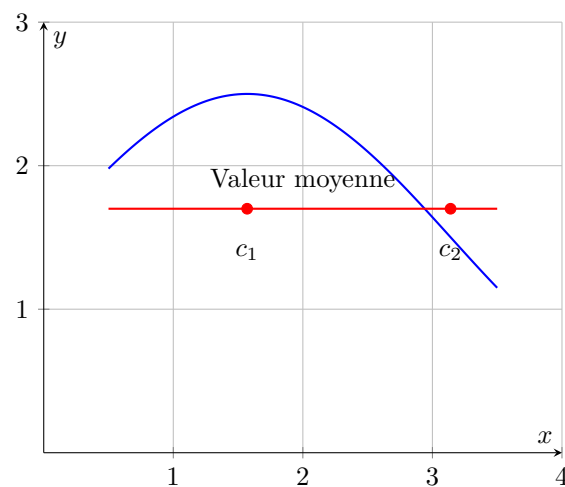
$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

3 Valeur moyenne

Valeur moyenne

Pour f continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



4 Intégration par parties

Intégration par parties

Pour u, v dérivables avec u', v' continues :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemple

Calculer $\int_0^1 xe^x dx$:

$$[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

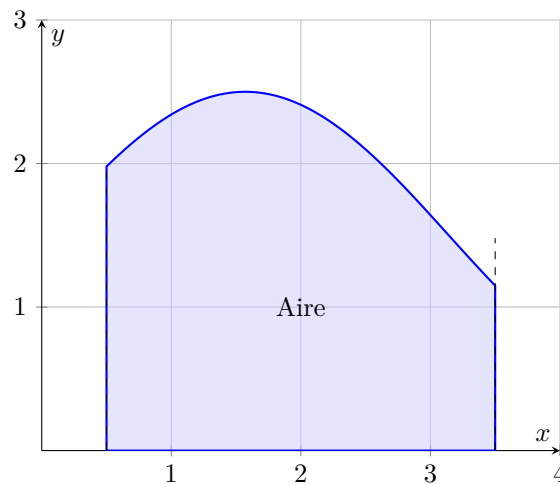
5 Applications géométriques

5.1 Calcul d'aires

Aire sous une courbe

Pour f continue positive sur $[a, b]$:

$$\text{Aire} = \int_a^b f(x)dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

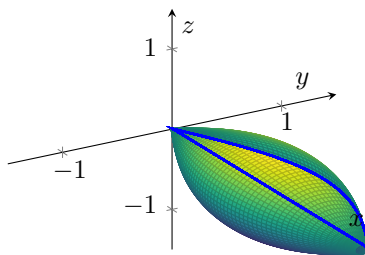


5.2 Calcul de volumes

Volume de révolution

Volume obtenu par rotation de C_f autour de l'axe Ox :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$$



6 Exercices avec solutions

6.1 Exercice 1 - Calculs d'intégrales

Exercice 1

Calculer :

$$a = \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx$$

$$b = \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} dx$$

Solution Exercice 1

1. $a = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_1^2 = \frac{8}{3} + 4 + 6 - \frac{1}{3} - 1 - 3 = \frac{29}{3}$
2. Poser $u = x^2 + 2x$: $b = \frac{-1}{4(x^2+2x)^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{36} + \infty$ (intégrale divergente)

6.2 Exercice 2 - Intégration astucieuse

Exercice 2

Soit $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

1. Calculer $I - J$
2. Calculer $I + J$
3. En déduire I et J

Solution Exercice 2

1. $I - J = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \ln |\cos x + \sin x| \Big|_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2}) - \ln(1) = \frac{1}{2} \ln 2$
2. $I + J = \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{\pi}{4}$
3. $I = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4}$, $J = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$

6.3 Exercice 3 - Intégration par parties

Exercice 3

Calculer par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I_2 = \int_1^e x \ln x dx$$

Solution Exercice 3

1. $I_1 = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$
2. $I_2 = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$

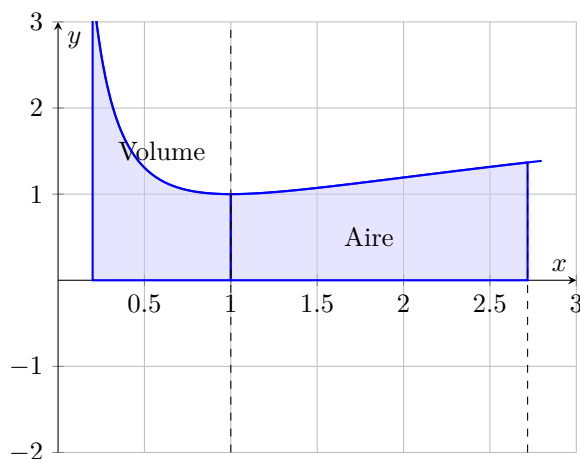
6.4 Exercice 4 - Calcul d'aire et volume**Exercice 4**

Soit $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

1. Calculer l'aire sous C_f entre $x = 1$ et $x = e$
2. Calculer le volume de révolution obtenu en faisant tourner C_f autour de Ox entre $x = t$ et $x = 1$ ($0 < t < 1$)

Solution Exercice 4

1. Aire = $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx = [\ln x + x \ln x - x]_1^e = 1$
2. Volume = $\pi \int_t^1 \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)^2 dx$ (calcul complexe)

**6.5 Exercice 5 - Encadrement d'intégrale****Exercice 5**

Soit $f(x) = \frac{1}{e^x(1-x)}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

1. Montrer que $1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{e}$
2. En déduire $\frac{1}{24} \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

Solution Exercice 5

1. f est croissante car $f'(x) > 0$. $f(0) = 1$, $f(1/2) = 2\sqrt{e}$
2. $\int_0^{1/2} x^2 dx \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x) dx \leq 2\sqrt{e} \int_0^{1/2} x^2 dx$

6.6 Exercice 6 - Limite d'intégrale

Exercice 6

Pour $a > 0$, soit $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx$

1. Montrer que $I(a) = -\frac{\ln a + 1}{a} + 1$
2. Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$

Solution Exercice 6

1. Intégration par parties avec $u = \ln x$, $v' = \frac{1}{x^2}$
2. $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln a}{a} = 0$ donc $\lim I(a) = 1$

Fin de la séance - Bon travail !