Continuité - Partie 1

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

1 Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

1.1 Continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur D_f et I_{x_0} un intervalle ouvert contenant x_0 et inclus dans D_f.
f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple

Considérons la fonction $f(x) = x^2$ en $x_0 = 2$.

- $f(2) = 4$
- $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Donc $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, ce qui montre que f est continue en $x_0 = 2$.

1.2 Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

Définition 1

Soit f une fonction définie sur D_f et $I_d = [x_0, x_0 + r[$ $(r > 0)$ un intervalle inclus dans D_f.
f est continue à droite au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur D_f et $I_g =]x_0 - r, x_0]$ $(r > 0)$ un intervalle inclus dans D_f.
f est continue à gauche au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

Propriété

f est continue au point x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche de x_0.
Ou encore : f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

Exemples

Exemple 1 : Fonction partie entière $E(x)$ en $x_0 = 1$

- Continue à droite : $\lim\limits_{x \to 1^+} E(x) = 1 = E(1)$
- Non continue à gauche : $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$
- Donc E n'est pas continue en $x_0 = 1$

Exemple 2 : Fonction définie par morceaux

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étude en $x_0 = 1$:

- $f(1) = 1$
- Limite à gauche : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$
- Limite à droite : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$
- Donc f est continue en $x_0 = 1$

2 Continuité sur un intervalle

2.1 Définitions

Définitions

- f est continue sur un intervalle ouvert $I =]a, b[\Leftrightarrow$ pour tout x de I, f est continue en x.
- f est continue sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite de a.
- f est continue sur $]a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à gauche de b.
- f est continue sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite de a et à gauche de b.

Exemples

Exemple 1 : La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Exemple 2 : La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ car :

— Continue sur $]0, +\infty[$

— Continue à droite en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$

3 Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

3.1 Propriétés

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur I.

— Les fonctions $f + g$, $f \times g$ et αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ sont continues sur I.

— Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I (pour $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$).

Exemples

Exemple 1 : Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$, continues sur $\mathbb{R}$.

— $f + g = x^2 + \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

— $f \times g = x^2 \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

— $\frac{f}{g} = \frac{x^2}{\sin x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

4 Continuité des fonctions usuelles

4.1 Propriétés

Propriétés

— Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.

— Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans D_f.

— Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

— La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Exemples

Exemple 1 : $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale).
Exemple 2 : $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (fonction rationnelle).
Exemple 3 : $f(x) = \tan(2x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5 Image d'un intervalle par une fonction continue

5.1 Propriétés

Propriétés

- L'image du segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment $J = [m, M]$ où m est la plus petite image et M est la plus grande image par f des éléments de $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) = [m, M]$.
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J. On note $J = f(I)$.

Exemples

Exemple 1 : Soit $f(x) = x^2$ sur $I = [-2, 3]$.

- f atteint son minimum en $x = 0$: $f(0) = 0$
- f atteint son maximum en $x = 3$: $f(3) = 9$
- Donc $f([-2, 3]) = [0, 9]$

Exemple 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I =]0, 1]$.

- $f(I) = [1, +\infty[$

6 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

- Si f est strictement croissante :
  - $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
  - $f(]a, b]) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)]$
- Si f est strictement décroissante :
  - $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
    item $f(]a, b]) = [f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$

Exemple

Exemple : $f(x) = e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $f([0, 1]) = [e^0, e^1] = [1, e]$
- $f(] - \infty, 0]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} e^x, e^0] =]0, 1]$

7 Continuité de la composée de deux fonctions continues

Théorème

- Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.
- Si f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Applications

- $f(x) = \sin(ax + b)$ et $g(x) = \cos(ax + b)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- $h(x) = \tan(ax + b)$ est continue pour tout x tel que $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Si f est positive et continue sur I alors $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue sur I.

Exemples

Exemple 1 : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

— $u(x) = x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et positive

— $\sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

— Donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 : $f(x) = \sin(e^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

— $u(x) = e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

— $\sin(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$

— Donc $f = \sin \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$

8 Exercices

8.1 Exercice 1

Exercice 1

Étudier la continuité de f en x_0 dans les cas suivants :

a. $x_0 = 5$ et

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-15}{x^2-25} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\} \\ 8 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

b. $x_0 = -1$ et

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

c. $x_0 = 3$ et

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{si } x \in [0, +\infty[\setminus \{3\} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

d. Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + ax^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = \frac{1}{2}$.

e. Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Solution Exercice 1

a. Étude en $x_0 = 5$:

— Simplifions $f(x)$ pour $x \neq -5, 5$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 25} = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5} \quad \text{pour } x \neq 5$$

— $\lim_{x \to 5} f(x) = \frac{5+3}{5+5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

— $f(5) = 8 \neq \frac{4}{5}$

— Donc f n'est pas continue en $x_0 = 5$

b. Étude en $x_0 = -1$:

— $\lim_{x \to -1} f(x) = 2(-1)^3 + 1 = -2 + 1 = -1$

— $f(-1) = 3 \neq -1$

— Donc f n'est pas continue en $x_0 = -1$

c. Étude en $x_0 = 3$:

— Calculons la limite en rationalisant :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

— $f(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

— Donc $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, la fonction est continue en $x_0 = 3$

d. Continuité en $x_0 = \frac{1}{2}$:

— Limite à gauche : $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = 2 + 1 = 3$

— Limite à droite : $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 2 \times \frac{1}{2} + a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{a}{4}$

— Pour la continuité : $3 = 1 + \frac{a}{4} \Rightarrow a = 8$

e. Étude en $x_0 = 1$:

— Limite à droite :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = -1$$

— Limite à gauche :

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2-x}} - 1 \right) = \frac{0}{\sqrt{1}} - 1 = -1$$

— $f(1) = -1$

— Les trois valeurs coïncident, donc f est continue en $x_0 = 1$

8.2 Exercice 2

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $[2, +\infty[$.

Solution Exercice 2

— Pour $x > 2$, simplifions $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad \text{pour } x \neq 2$$

— Étude en $x_0 = 2$:
  - — $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$
  - — $f(2) = 4$
  - — Donc f est continue à droite en 2

— Pour $x > 2$, $f(x) = x+2$ est continue comme somme de fonctions continues

— Conclusion : f est continue sur $[2, +\infty[$

8.3 Exercice 3

Exercice 3

Calculer l'image de l'intervalle I par f dans les cas suivantes :
a. $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $I = [-2, 3]$
b. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; $I =]-2, +\infty[$
c. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1$; $I =]-\infty, 1]$

Solution Exercice 3

a. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $[-2, 3]$:

— f est polynomiale donc continue

— Dérivée : $f'(x) = 2x - 2$ s'annule en $x = 1$

— Valeurs aux bornes et point critique :
  - — $f(-2) = 4 + 4 + 3 = 11$
  - — $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$
  - — $f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$

— Minimum : 2, Maximum : 11

— Donc $f(I) = [2, 11]$

b. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ sur $]-2, +\infty[$:

— f est rationnelle donc continue sur son domaine

— Étude des limites :
  - — $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$
  - — $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

— Dérivée : $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ (strictement croissante)

— Donc $f(I) =]-\infty, 1[$

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1$ sur $]-\infty, 1]$:

— f est polynomiale donc continue

— Dérivée : $f'(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ (strictement croissante)

— $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

— $f(1) = \frac{1}{3} - 1 + 3 - 1 = \frac{4}{3}$

— Donc $f(I) =]-\infty, \frac{4}{3}]$

8.4 Exercice 4

Exercice 4

Étudier la continuité de f sur I dans les cas suivants :
a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $I = [1, +\infty[$
b. $f(x) = \sqrt{-\sin^2(x) + \sin(x) + 2}$; $I = [0, \frac{\pi}{6}[$

Solution Exercice 4

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ sur $[1, +\infty[$:

- Composition de fonctions continues
- $x^2 - 1 \geq 0$ sur I
- Continue sur $]1, +\infty[$
- Continuité en $x_0 = 1$:
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0 = f(1)$
  - Continue à droite en 1
- Conclusion : f est continue sur $[1, +\infty[$

b. $f(x) = \sqrt{-\sin^2(x) + \sin(x) + 2}$ sur $[0, \frac{\pi}{6}[$:

- Posons $u(x) = -\sin^2(x) + \sin(x) + 2$
- Vérifions $u(x) \geq 0$:
  - $u(x) = -(\sin^2(x) - \sin(x) - 2)$
  - Racines de $X^2 - X - 2 = 0$: $X = -1$ ou $X = 2$
  - Donc $u(x) = -(\sin(x) + 1)(\sin(x) - 2) \geq 0$ car $\sin(x) \in [0, \frac{1}{2}]$
- Composition de fonctions continues
- Continue sur $[0, \frac{\pi}{6}[$

8.5 Exercice 5

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(2) = 4$ et $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-x-2}$ si $x \neq 2$.
a. Déterminer D_f.
b. Montrer que f est continue en $x_0 = 2$.
c. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}), f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x+1}$.
d. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.

Solution Exercice 5

a. Détermination de D_f :

- Le dénominateur $x^2 - x - 2 = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 2$
- Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ avec $f(2)$ définie séparément

b. Continuité en $x_0 = 2$:

- Factorisons numérateur et dénominateur :
  - $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$
  - $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
- Pour $x \neq 2$:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x^2+2x+4}{x+1} \quad \text{pour } x \neq -1, 2$$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{4+4+4}{3} = \frac{12}{3} = 4 = f(2)$
- Donc f est continue en $x_0 = 2$

c. Vérification :

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x^2+2x+4}{x+1} \quad \text{pour } x \neq -1, 2$$

d. Continuité sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$:

- Sur ces intervalles, f est rationnelle donc continue
- En $x = 2$, on a déjà montré la continuité
- Donc f est continue sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$

8.6 Exercice 6

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(1) = a$ et $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}$ si $x \neq 1$ où $a \in \mathbb{R}$.
a. Déterminer D_f, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0 = 1$?

Solution Exercice 6

a. Détermination de D_f :

— Conditions :

— $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

— $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

— Donc $D_f = [-3, +\infty[\backslash\{-1, 1\}$ avec $f(1)$ définie séparément

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\sqrt{x+3}-2}{1-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{-x^2} = -\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = -\infty$$

b. Continuité en $x_0 = 1$:

— Calculons la limite en 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}$$

— Forme indéterminée $\frac{0}{0}$, utilisons la règle de l'Hôpital :

— Dérivée du numérateur : $2x\sqrt{x+3} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

— Dérivée du dénominateur : $-2x$

— Donc :

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x\sqrt{x+3} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+3}}}{-2x} = \frac{2 \times 2 + \frac{1}{4}}{-2} = -\frac{17}{8}$$

— Pour que f soit continue en $x_0 = 1$, il faut $a = -\frac{17}{8}$

Fin de la séance - Bon travail !