Continuité - Partie 2

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

1 Théorème des valeurs intermédiaires

1.1 Propriété (Théorème des valeurs intermédiaires)

Théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Exemple

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - x + 1$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

- $f(0) = 1$ et $f(2) = 7$
- Soit $k = 3$ (compris entre 1 et 7)
- D'après le théorème, il existe $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = 3$
- En effet, $f(1) = 1$ et $f(2) = 7$, donc par continuité, il existe $c \in [1, 2]$ avec $f(c) = 3$

1.2 Conséquences

Conséquences

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : $f([a,b]) = [m,M]$
- Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[0,1]$.

- $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$
- f est continue sur $[0,1]$
- Donc il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$

1.3 Cas d'une fonction continue et monotone

Théorème

Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Exemple

Soit $f(x) = e^x - 2$ sur $[0,1]$.

- $f(0) = -1$ et $f(1) = e - 2 \approx 0.718$
- f est continue et strictement croissante
- Pour $k = 0$, il existe un unique $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$
- En effet, $c = \ln 2 \approx 0.693$

2 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

2.1 Théorème

Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur I admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(I)$.

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2.2 Relation entre f et sa réciproque f^{-1}

Relations

- $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
- $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$

Exemple

Pour $f(x) = e^x$ et $f^{-1}(x) = \ln x$:
- $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$

2.3 Propriétés de la fonction réciproque f^{-1}

Propriétés

- f^{-1} est continue sur $J = f(I)$
- f^{-1} a la même monotonie que f
- Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

Exemple

Pour $f(x) = x^2$ sur $[0, +\infty[$:
- Réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- Les courbes sont symétriques par rapport à $y = x$
- $\sqrt{x^2} = x$ pour $x \geq 0$
- $(\sqrt{x})^2 = x$ pour $x \geq 0$

3 La fonction racine d'ordre n

3.1 Définition et théorème

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f(x) = x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Sa réciproque est la fonction racine n-ième : $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

3.2 Cas particuliers

Cas particuliers

- $n = 2$: $\sqrt{x}$ (racine carrée)
- $n = 3$: $\sqrt[3]{x}$ (racine cubique)
- $n = 4$: $\sqrt[4]{x}$ (racine quatrième)

3.3 Propriétés

Propriétés

Pour $x, y > 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$:
- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{m/n}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

Exemple

- $\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$
- $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

3.4 Limites de la fonction $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

Limites

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \geq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

Exemple

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} = +\infty$
- $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = 3$

4 Puissance rationnelle d'un nombre réel positif

4.1 Définition

Définition

Pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ et $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$:

$$x^r = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Exemple

- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
- $16^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

4.2 Propriétés

Propriétés

Pour $x, y > 0$ et $r, s \in \mathbb{Q}$:

- $x^{r+s} = x^r x^s$
- $(xy)^r = x^r y^r$
- $(x^r)^s = x^{rs}$
- $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

Exemple

- $2^{1/2} \times 2^{3/2} = 2^2 = 4$
- $(3^{1/2})^4 = 3^2 = 9$

5 Exercices

5.1 Exercice 1

Exercice 1

a. Soit $f(x) = x^6 + 2x^4 - 1$. Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.
b. Soit $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

— Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

— Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

— Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1, +\infty[$

Solution Exercice 1

a.

— $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$

— f est continue sur $[0, 1]$

— D'après le TVI, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$

b.

— $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$

— Tableau de variations :

x	$-\infty$		1	3	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	-	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

— g strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, $g(-\infty) = -\infty$, $g(1) = 5 \Rightarrow$ solution unique dans $]-\infty, 1]$

— g strictement décroissante sur $[1, 3]$, $g(1) = 5$, $g(3) = 1 \Rightarrow$ pas de solution

— g strictement croissante sur $[3, +\infty[$, $g(3) = 1$, $g(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ pas de solution

— Donc une seule solution réelle $\alpha \in]-\infty, 1[$

— Sur $[1, +\infty[$, $g(x) \geq 1 > 0$

5.2 Exercice 2

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

— Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes

— Montrer que $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

— Dresser le tableau de variations

— Déterminer $f(]-\infty, -2])$, $f([-2, -1[)$, $f(]-1, 0])$ et $f([0, +\infty[)$

— Soit g la restriction de f à $]-\infty, -2]$

  — Montrer que g admet une réciproque g^{-1} sur un intervalle J à déterminer

  — Montrer que $g^{-1}(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}$

Solution Exercice 2

— $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

— Limites :

— $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

— $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

— Dérivée : $f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

— Variations :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-	- 0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	-4 $\searrow$	$-\infty \mid +\infty \searrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

— Images :

— $f(]-\infty,-2]) =]-\infty,-4]$

— $f([-2,-1[) = [-4,-\infty[$

— $f(]-1,0]) =]-\infty,0]$

— $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

— g est strictement croissante sur $]-\infty,-2]$, donc bijective sur $J =]-\infty,-4]$

— Pour $y = g(x) = \frac{x^2}{x+1}$, résoudre pour $x \leq -2$:

$$\begin{aligned} y(x+1) &= x^2 \\ x^2 - yx - y &= 0 \\ \Delta &= y^2 + 4y \\ x &= \frac{y \pm \sqrt{y^2+4y}}{2} \end{aligned}$$

On prend la solution $x = \frac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2}$ car $x \leq -2$

5.3 Exercice 3

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2-\sqrt[3]{x+7}}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{5x^2+x+1}+2x$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x+1}-2x$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3-5x+2}{3x^2+\sqrt[3]{2x^2+1}-5}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+x+1}{\sqrt[3]{8x^2+3}-\sqrt[3]{8x^2+1}}$

Solution Exercice 3

1. Forme indéterminée 0/0. Posons $t = \sqrt[3]{x+7}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt[3]{x+7}}{x-1} &= \lim_{t\to 2} \frac{2-t}{t^3-8} \\ &= \lim_{t\to 2} \frac{-(t-2)}{(t-2)(t^2+2t+4)} \\ &= -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

2. On multiplie numérateur et dénominateur par $(\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)(3x-5)} + \sqrt[3]{(3x-5)^2})$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)[\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)(3x-5)} + \sqrt[3]{(3x-5)^2}]}{(x-1)-(3x-5)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)[\cdots]}{-2x+4} = -\frac{1}{2} \times 3 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

3. On factorise :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{5x^2+x+1} + 2x &= \lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 2\right) \\ &= -\infty \times (0+2) = -\infty\end{aligned}$$

4. On développe avec l'identité $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to +\infty} \frac{(8x^3+3x+1) - 8x^3}{\sqrt[3]{(8x^3+3x+1)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3+3x+1} + 4x^2} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{4x^2+\cdots} = 0\end{aligned}$$

5. On divise numérateur et dénominateur par x^2 :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \sqrt[3]{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}} - \frac{5}{x^2}} = +\infty$$

6. On utilise $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+x+1}{\frac{2}{\sqrt[3]{(8x^2+3)^2} + \sqrt[3]{(8x^2+3)(8x^2+1)} + \sqrt[3]{(8x^2+1)^2}}} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+x+1}{\frac{2}{12x^{4/3}}} = +\infty\end{aligned}$$

5.4 Exercice 4

Exercice 4

Soit $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$ définie sur $[1, +\infty[$.

- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Montrer que f est continue sur $[1, +\infty[$
- Montrer que $f'(x) = \frac{2x(x^2-2)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+1}$ pour $x > 1$
- Déduire les variations de f
- Soit g la restriction de f à $[\sqrt{2}, +\infty[$
  - Montrer que g admet une réciproque sur un intervalle J à déterminer
  - Montrer que $g(x) = (\sqrt{x^2-1}-1)^2$
  - Déduire $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$

Solution Exercice 4

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ indéterminée. Factorisons :

$$f(x) = x^2(1 - \frac{2\sqrt{1-1/x^2}}{x}) \to +\infty$$

- Continuité :
  - Continue sur $]1, +\infty[$ comme composition de fonctions continues
  - Continue à droite en 1 : $\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 = f(1)$
- Dérivée :

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x\sqrt{x^2-1}-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x(\sqrt{x^2-1}-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

- Variations :
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (hors domaine) ou $\sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$
  - f décroissante sur $[1, \sqrt{2}]$, croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$
- g strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, donc bijective sur $J = [0, +\infty[$
- Expression de g :

$$g(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2-1} = (\sqrt{x^2-1})^2 - 2\sqrt{x^2-1} + 1 - 1 = (\sqrt{x^2-1}-1)^2 - 1$$

- Réciproque :

$$\begin{aligned} y &= (\sqrt{x^2-1}-1)^2 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{x^2-1}-1 \\ \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{y}+1 \\ x^2-1 &= (\sqrt{y}+1)^2 \\ x &= \sqrt{1+(\sqrt{y}+1)^2} \end{aligned}$$

5.5 Exercice 5

Exercice 5

Soit $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

— Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

— Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]-\frac{1}{2}, 0[$

— Calculer $f(-\frac{1}{4})$ et donner un encadrement de a d'amplitude 0.25

— Montrer que $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$

Solution Exercice 5

— Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

— Discriminant : $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout x

— f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

— $f(-1/2) = -1/8 - 1/4 - 3/2 + 1 = -7/8 < 0$

— $f(0) = 1 > 0$

— D'après le TVI, il existe unique $a \in]-1/2, 0[$ tel que $f(a) = 0$

— $f(-1/4) \approx 0.17 > 0$, donc $a \in]-1/2, -1/4[$

— Pour la dernière relation, partir de $f(a) = 0$ et isoler $\sqrt{a+1}$:

$$\begin{aligned} a^3 - a^2 + 3a + 1 &= 0 \\ a(a^2 - a + 3) &= -1 \\ \text{Or } a^2 - a + 3 &= (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} > 0 \\ \text{Donc } a &= \frac{-1}{a^2 - a + 3} \\ \text{Et } \sqrt{a+1} &= \frac{-2a}{a+1} \end{aligned}$$

5.6 Exercice 6

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$.

— Justifier que $D_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

— Calculer les limites aux bornes du domaine

— Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

— Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{1}{4}, 1[$

— Vérifier que $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$

Solution Exercice 6

- Domaine :
  - $x \neq 0$
  - $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
  - Donc $D_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$
- Limites :
  - $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 - 0 = -1$
  - $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty - 2 = -\infty$
  - $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty - 2 = +\infty$
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$
- Continuité et monotonie sur $]0, +\infty[$:
  - Continue comme somme de fonctions continues
  - Dérivée : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 0$
  - Strictement décroissante
- Solution unique :
  - $f(1/4) = 4 - 2\sqrt{5/4} \approx 4 - 2.23 > 0$
  - $f(1) = 1 - 2\sqrt{2} \approx 1 - 2.82 < 0$
  - D'après le TVI, il existe unique $\alpha \in]1/4, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$
- Vérification :

$$\frac{1}{\alpha} - 2\sqrt{\alpha + 1} = 0$$
$$1 = 2\alpha\sqrt{\alpha + 1}$$
$$1 = 4\alpha^2(\alpha + 1)$$
$$4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$$

Fin de la séance - Bon travail !