

Dénombrement

Niveau : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Ensemble fini - Cardinal
- II. Principe fondamental
- III. Arrangement avec répétition
- IV. Arrangement sans répétition
- V. Permutation
- VI. Combinaison
- VII. Binôme de Newton
- VIII. Exercices

1 Ensemble fini - Cardinal

1.1 Définition

Cardinal d'un ensemble

Un ensemble E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E contient exactement n éléments.
On note $\text{card}(E) = n$ et par convention $\text{card}(\emptyset) = 0$.

1.2 Propriétés

Propriétés du cardinal

Pour deux ensembles finis E et F :

- Si $E \cap F = \emptyset$ alors $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$
- En général : $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$
- $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$
- Pour $A \subset E$, $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{c, d, e\}$:

- $\text{card}(E) = 3$, $\text{card}(F) = 3$
- $\text{card}(E \cup F) = 3 + 3 - 1 = 5$
- $\text{card}(E \times F) = 3 \times 3 = 9$

2 Principe fondamental de dénombrement

2.1 Principe du produit

Principe fondamental

Si une expérience comporte p étapes de choix :

- 1ère étape : n_1 possibilités
- 2ème étape : n_2 possibilités
- ...
- p -ème étape : n_p possibilités

Alors le nombre total de résultats possibles est :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

Exemple

Combien de nombres à 2 chiffres distincts peut-on former avec $\{3, 4, 5\}$?

Solution : 3 choix pour le 1er chiffre et 2 pour le second $\Rightarrow 3 \times 2 = 6$ nombres.

3 Arrangement avec répétition

Arrangement avec répétition

Le nombre d'**arrangements avec répétition** de p éléments parmi n est :

$$n^p$$

Exemple

Une urne contient 6 boules rouges et 3 vertes. On tire 2 boules avec remise :

- Nombre total de tirages : $9^2 = 81$
- Tirages (Rouge, Vert) : $6 \times 3 = 18$

4 Arrangement sans répétition

Arrangement sans répétition

Le nombre d'**arrangements sans répétition** de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \cdots (n-p+1)$$

où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (factorielle de n).

Exemple

Course entre 4 athlètes (A,B,C,D) avec 2 prix distincts :

- Nombre de podiums possibles : $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

Urne avec 6 boules rouges et 3 vertes, tirage sans remise de 2 boules :

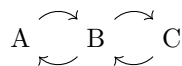
- Nombre total : $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$
- Deux vertes : $A_3^2 = 6$

5 Permutation

Permutation

Une **permutation** est un arrangement sans répétition de tous les n éléments :

$$P_n = A_n^n = n!$$



Permutations de 3 éléments = 6

6 Combinaison

Combinaison

Le nombre de **combinaisons** de p éléments parmi n est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

Soit $E = \{a, b, c, d\}$:

- Nombre de parties à 2 éléments : $C_4^2 = 6$
- Nombre de parties à 3 éléments : $C_4^3 = 4$

7 Binôme de Newton

Binôme de Newton

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Exemple

Développer $(x + 1)^4$:

$$(x + 1)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 + C_4^2 x^2 + C_4^3 x + C_4^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

8 Exercices

8.1 Exercice 1

Exercice 1

Un sac contient 10 boules :

— 3 rouges, 3 vertes, 4 noires

On tire 2 boules :

1. Nombre de tirages possibles (simultanés)
2. Nombre de tirages de même couleur
3. Nombre de tirages de couleurs différentes
4. Mêmes questions pour :
 - a. Tirages successifs sans remise
 - b. Tirages successifs avec remise

Solution Exercice 1

1. Tirages simultanés : $C_{10}^2 = 45$
2. Même couleur : $C_3^2 + C_3^2 + C_4^2 = 3 + 3 + 6 = 12$
3. Couleurs différentes : $45 - 12 = 33$
4. a. Sans remise : $A_{10}^2 = 90$ total, $A_3^2 + A_3^2 + A_4^2 = 6 + 6 + 12 = 24$ même couleur
5. b. Avec remise : $10^2 = 100$ total, $3^2 + 3^2 + 4^2 = 34$ même couleur

8.2 Exercice 2

Exercice 2

Une urne contient 10 jetons :

— 4 bleus (1-4), 3 rouges (1-3), 3 verts (1-3)

On tire 2 jetons simultanément :

1. Nombre de tirages possibles
2. Nombre de tirages de même couleur
3. Nombre de tirages de couleurs différentes
4. Nombre de tirages avec somme des numéros égale à 5

Solution Exercice 2

1. $C_{10}^2 = 45$
2. $C_4^2 + C_3^2 + C_3^2 = 6 + 3 + 3 = 12$
3. $45 - 12 = 33$
4. Paires possibles : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
Nombre : 4 (bleu-bleu) + 2 (rouge-vert) = 6

8.3 Exercice 3

Exercice 3

Avec les chiffres $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

1. Combien de nombres à 3 chiffres distincts ?
2. Combien sont < 400 ?
3. Combien sont pairs ?
4. Combien sont multiples de 5 ?

Solution Exercice 3

1. $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$
2. Premier chiffre 2 ou 3 : $2 \times 5 \times 4 = 40$
3. Dernier chiffre pair (2,4,6) : $3 \times 5 \times 4 = 60$
4. Dernier chiffre 5 : $1 \times 5 \times 4 = 20$

8.4 Exercice 4**Exercice 4**

On lance un dé cubique 2 fois :

1. Nombre de résultats possibles
2. Nombre de résultats avec somme ≤ 5
3. Nombre de résultats avec 1er lancer pair

Solution Exercice 4

1. $6 \times 6 = 36$
2. Sommes possibles : 2 (1), 3 (2), 4 (3), 5 (4) $\Rightarrow$ Total $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
3. Premier lancer pair (2,4,6) : $3 \times 6 = 18$

Fin de la séance - Bon travail !