

Dérivation - Partie 1

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0
 - 1-1. Dérivabilité
 - 1-2. Interprétation géométrique
- II. Dérivabilité sur un intervalle
- III. Fonction dérivée première et dérivées d'ordre supérieur
- IV. Opérations sur les fonctions dérivables
- V. Dérivabilité des fonctions usuelles
- VI. Dérivabilité de la composée de deux fonctions
- VII. Dérivée de la fonction réciproque
- VIII. Tableau des dérivées usuelles
- IX. Exercices avec solutions

1 Dérivabilité d'une fonction en un point

1.1 Définitions

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

Dérivabilité en x_0 :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

On note $\ell = f'(x_0)$ le nombre dérivé.

Dérivabilité à droite/gauche :

$$f \text{ dérivable à droite en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ dérivable à gauche en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$$

Exemple

Étudier la dérivabilité en $x_0 = 0$ de $f(x) = |x|$.

Solution :

- À droite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1$
- À gauche : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1$
- Les limites sont différentes, donc f n'est pas dérivable en 0.

1.2 Interprétation géométrique

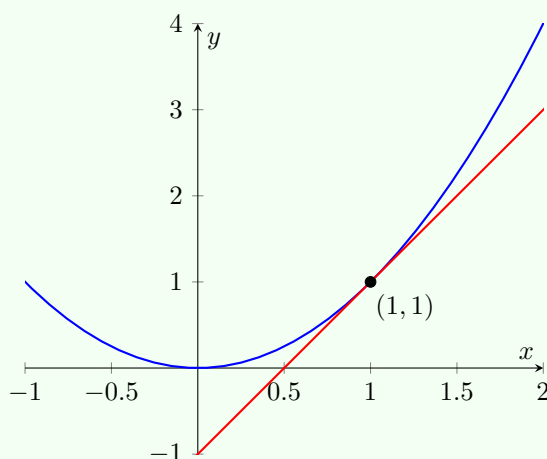
Interprétation géométrique

- $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en x_0 .
- Équation de la tangente : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si f n'est pas dérivable en x_0 mais admet des dérivées à gauche et à droite différentes, le point $(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux.

Exemple

Pour $f(x) = x^2$ en $x_0 = 1$:

- $f'(1) = 2$
- Tangente : $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$



2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I .

- Sur $]a, b[$: dérivable en tout point de $]a, b[$
- Sur $[a, b]$: dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite en a , à gauche en b

Exemple

$f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ mais pas en 0 (dérivable à droite seulement).

3 Fonction dérivée et dérivées d'ordre supérieur

Définitions

- La **fonction dérivée** f' associe à chaque x le nombre dérivé $f'(x)$.
- La **dérivée seconde** f'' est la dérivée de f' .
- La **dérivée n-ième** $f^{(n)}$ est obtenue en dérivant n fois f .

Exemple

Pour $f(x) = x^3 + 2x$:

- $f'(x) = 3x^2 + 2$
- $f''(x) = 6x$
- $f'''(x) = 6$
- $f^{(4)}(x) = 0$

4 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriétés

Soient f et g dérivables sur I , alors :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Exemple

Dériver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

5 Dérivabilité des fonctions usuelles

Propriétés

- Polynômes : dérivables sur $\mathbb{R}$
- Fonctions rationnelles : dérivables sur leur domaine
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(f^n)' = n f^{n-1} f'$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$

Exemple

Dériver $f(x) = \sin^3(x^2)$:

$$f'(x) = 3 \sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = 6x \sin^2(x^2) \cos(x^2)$$

6 Dérivée de la composée

Théorème

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$$

ExempleDériver $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$:

$$f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

7 Dérivée de la fonction réciproque**Théorème**Si f est bijective et dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ExemplePour $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

8 Tableau des dérivées usuelles**Tableau des dérivées**

Fonction	Dérivée
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

9 Exercices avec solutions**9.1 Exercice 1****Exercice 1**Étudier la dérivabilité en $x_0 = -1$ de :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 5 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Solution Exercice 1

Calculons la limite du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 1 - 5}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 4}{x + 1}\end{aligned}$$

Factorisons le numérateur :

$$x^3 - x^2 + 2x - 4 = (x + 1)(x^2 - 2x + 4) - 8$$

La limite n'existe pas (forme $\frac{-8}{0}$), donc f n'est pas dérivable en -1 .

9.2 Exercice 2**Exercice 2**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

2. $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$

3. $f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x - 1}\right)^4$

Solution Exercice 2

1. $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

2. $f'(x) = \frac{(3x^2-4)(x^2+1) - (x^3-4x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+7x^2-4}{(x^2+1)^2}$

3. Simplifions d'abord : $\frac{x^2-2x}{x-1} = x - 1 - \frac{1}{x-1}$ Donc $f'(x) = 4 \left(x - 1 - \frac{1}{x-1}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{(x-1)^2}\right)$

9.3 Exercice 3**Exercice 3**

Soit $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x}$.

1. Déterminer D_f
2. Étudier la dérivabilité à gauche en $x_0 = 0$
3. Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty, 0[$

Solution Exercice 3

1. $x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x \in] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

2. Dérivabilité à gauche en 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \sqrt{x^2 - x}}{x} = -1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt{1 - 1/x}}{x} \\ &= -1 - \sqrt{+\infty} = -\infty\end{aligned}$$

Non dérivable à gauche (tangente verticale)

3. Pour $x \in] -\infty, 0[$:

$$f'(x) = -1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

9.4 Exercice 4

Exercice 4

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x+2} + 10 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1. Étudier la continuité en $x = 2$
2. Étudier la dérivabilité en $x = 2$

Solution Exercice 4

1. Continuité :

- $f(2) = \sqrt{4} + 10 = 12$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = 12$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 12$
- Continue en 2

2. Dérivabilité :

- À gauche : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2x+4-12}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = 6$
- À droite : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}+10-12}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4}$
- Dérivées à gauche et droite différentes, donc point anguleux en $x = 2$

9.5 Exercice 5

Exercice 5

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$
2. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$
3. Calculer $(f^{-1})'(-2)$

Solution Exercice 5

1. f continue, $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 2 > 0$ et $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ donc solution unique.
2. f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc bijective.
3. $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$

9.6 Exercice 6

Exercice 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin^3(x)$
2. $f(x) = \tan^3(x)$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^{11}}$

Solution Exercice 6

1. $f'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$
2. $f'(x) = 3 \tan^2(x)(1 + \tan^2(x)) = \frac{3 \tan^2(x)}{\cos^2(x)}$
3. $f'(x) = \frac{11}{3} x^{8/3}$

Fin de la séance - Bon travail !