

Dérivation et étude des fonctions - Partie 2

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Applications de la dérivée première
 - 1-1. Monotonie d'une fonction
 - 1-2. Extremums d'une fonction
- II. Applications de la dérivée seconde
 - 2-1. Concavité et convexité
 - 2-2. Points d'inflexion
- III. Symétries de la courbe
 - 3-1. Centre de symétrie
 - 3-2. Axe de symétrie
- IV. Branches infinies
 - 4-1. Asymptotes verticales
 - 4-2. Asymptotes horizontales
 - 4-3. Asymptotes obliques
- V. Exercices avec solutions

1 Applications de la dérivée première

1.1 Monotonie d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I

Exemple

Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

1.2 Extremums d'une fonction

Théorème

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert contenant a :

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$
- Si $f'(a) = 0$ et change de signe en a , alors f admet un extremum local en a

Exemple

Pour $f(x) = x^2 e^{-x}$:

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$$

Racines : $x = 0$ (minimum) et $x = 2$ (maximum)

2 Applications de la dérivée seconde

2.1 Concavité et convexité

Définition

Soit f deux fois dérivable sur I :

- Si $f''(x) > 0$ sur I , f est convexe (courbe au-dessus des tangentes)
- Si $f''(x) < 0$ sur I , f est concave (courbe en-dessous des tangentes)

Exemple

$f(x) = x^3$:

$$f''(x) = 6x$$

- Convexe sur $]0, +\infty[$
- Concave sur $] - \infty, 0[$

2.2 Points d'inflexion

Définition

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente et où la concavité change.
Si $f''(a) = 0$ et change de signe en a , alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

Exemple

Pour $f(x) = x^3$, $x = 0$ est un point d'inflexion.

3 Symétries de la courbe

3.1 Centre de symétrie

Propriété

$I(a, b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si :

$$\forall h, \quad f(a+h) + f(a-h) = 2b$$

Exemple

$f(x) = x^3$ a pour centre de symétrie $I(0, 0)$.

3.2 Axe de symétrie**Propriété**

La droite $x = a$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si :

$$\forall h, \quad f(a + h) = f(a - h)$$

Exemple

$f(x) = x^2$ a pour axe de symétrie $x = 0$.

4 Branches infinies**4.1 Asymptotes verticales****Définition**

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors $x = a$ est asymptote verticale.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{x}$ a pour AV $x = 0$.

4.2 Asymptotes horizontales**Définition**

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors $y = b$ est asymptote horizontale.

Exemple

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ a pour AH $y = 1$.

4.3 Asymptotes obliques**Définition**

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors $y = ax + b$ est asymptote oblique.

Méthode :

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$$

Exemple

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ a pour AO $y = x$.

5 Exercices avec solutions

5.1 Exercice 1

Exercice 1

Soit $f(x) = x + 2\sqrt{x+1}$.

1. Déterminer D_f
2. Étudier les limites aux bornes
3. Trouver une asymptote oblique
4. Étudier les variations de f
5. Montrer que f admet une réciproque f^{-1}

Solution Exercice 1

1. $D_f = [-1, +\infty[$
2. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
3. AO en $+\infty : y = x + 1$
4. $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0$ donc f strictement croissante
5. f strictement croissante donc bijective, admet une réciproque

5.2 Exercice 2

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$
2. Étudier les limites en $\pm\infty$
3. Montrer que $I(1,0)$ est centre de symétrie
4. Étudier les variations

Solution Exercice 2

1. $x^2 - 2x + 2 > 0$ pour tout x
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
3. $f(1+h) + f(1-h) = 0$
4. $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)^{3/2}} > 0$ donc f strictement croissante

5.3 Exercice 3

Exercice 3

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

1. Étudier la continuité en $x = 1$
2. Étudier la dérivabilité en $x = 1$
3. Étudier les variations

Solution Exercice 3

1. Continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$
2. Dérivable en 1 avec $f'(1) = -\frac{1}{8}$
3. $f'(x) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0$ pour $x \neq 1$

5.4 Exercice 4**Exercice 4**

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^3+x^2} & \text{si } x \neq -1, 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Étudier les asymptotes
2. Étudier les variations
3. Construire la courbe

Solution Exercice 4

1. AV en $x = -1$, AO en $+\infty : y = x - 1$
2. $f'(x) = \frac{x^5(x+2)}{(x^3+x^2)^2}$
3. Variations :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-4 \searrow$	$-\infty +\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

5.5 Exercice 5**Exercice 5**

Soit $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$.

1. Déterminer D_f
2. Étudier la parité
3. Étudier les asymptotes
4. Étudier les variations
5. Étudier la concavité

Solution Exercice 5

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2. Impaire : $f(-x) = -f(x)$
3. AV en $x = \pm 1$, AO en $\pm\infty : y = x$
4. $f'(x) = \frac{x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2}$
5. $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

5.6 Exercice 6

Exercice 6

Soit $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Étudier les limites en $\pm\infty$
2. Montrer que $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique
3. Étudier les variations

Solution Exercice 6

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$
3. $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ pour tout x

Fin de la séance - Bon travail !