

Fonctions Exponentielles

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

- I. Fonction exponentielle népérienne
- II. Propriétés algébriques
- III. Limites remarquables
- IV. Dérivation des fonctions exponentielles
- V. Étude de la fonction $x \mapsto e^x$
- VI. Fonction exponentielle de base a
- VII. Exercices avec solutions

1 Fonction exponentielle népérienne

1.1 Définition

Définition

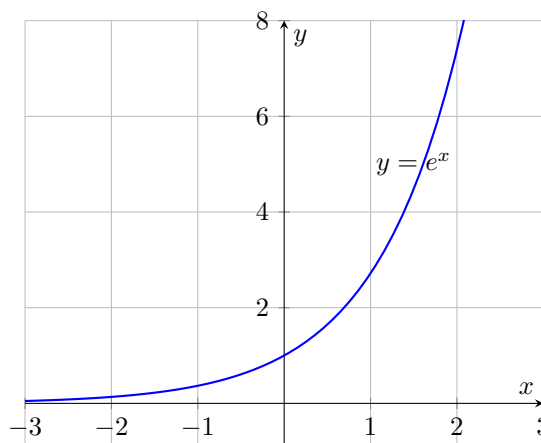
La fonction exponentielle népérienne, notée $\exp$ ou $x \mapsto e^x$, est la réciproque de la fonction logarithme népérien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 : e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

1.2 Conséquences

Propriétés fondamentales

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
- $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$
- La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



2 Propriétés algébriques

Propriétés opératoires

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$:

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^r = e^{ra}$
- $\sqrt{e^a} = e^{a/2}$

Exemple

Simplifier $A = \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$:

$$A = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} = e^x + 1 \quad \text{pour } x \neq 0$$

3 Limites remarquables

Limites à connaître

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4 Dérivation des fonctions exponentielles

4.1 Théorème fondamental

Dérivée de l'exponentielle

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(e^x)' = e^x$$

4.2 Dérivée de composée

Théorème

Si u est dérivable sur I , alors e^u est dérivable sur I et :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Exemple

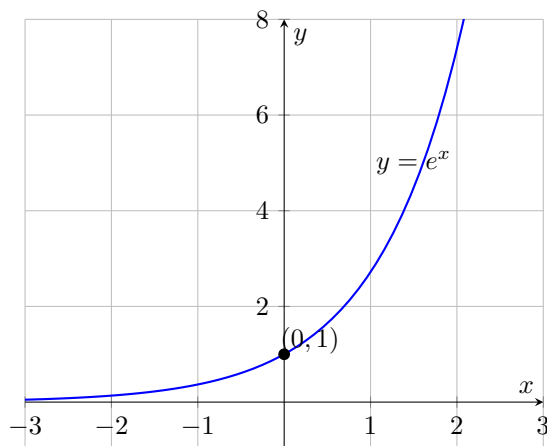
Dériver $f(x) = e^{2x^2-3x+1}$:

$$f'(x) = (4x - 3)e^{2x^2-3x+1}$$

5 Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = e^x$		+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



6 Fonction exponentielle de base a

6.1 Définition

Définition

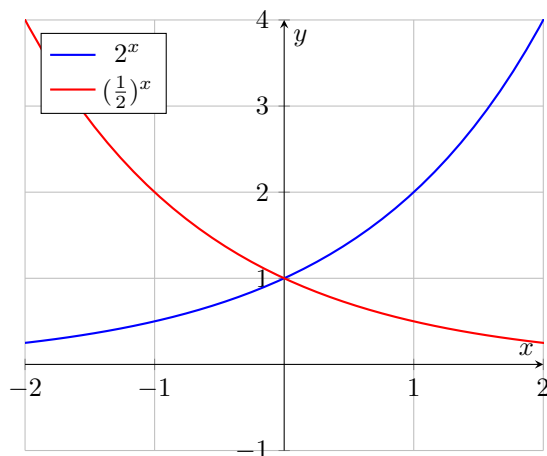
Pour $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction exponentielle de base a est :

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

6.2 Propriétés

Variations

- Si $a > 1$: f est strictement croissante
- Si $0 < a < 1$: f est strictement décroissante



7 Exercices avec solutions

7.1 Exercice 1 - Simplification

Exercice 1

Simplifier les expressions :

1. $A = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
2. $B = \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x} + 2e^x + 1}$

Solution Exercice 1

1. $A = (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 4$
2. $B = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

7.2 Exercice 2 - Étude de fonction

Exercice 2

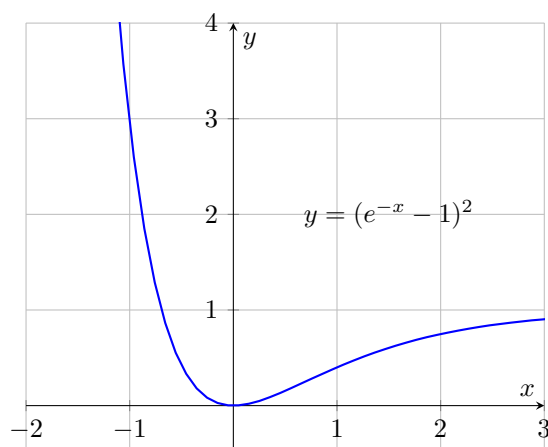
Soit $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. Montrer que $f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$
3. Dresser le tableau de variation

Solution Exercice 2

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
2. $f'(x) = 2(e^{-x} - 1)(-e^{-x}) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$
3. Tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\searrow$ 1



7.3 Exercice 3 - Résolution d'équations

Exercice 3

Résoudre :

1. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
2. $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$

Solution Exercice 3

1. Poser $X = e^x$: $X^2 + X - 2 = 0 \Rightarrow X = 1$ ou $X = -2$
Seule solution : $X = 1 \Rightarrow x = 0$
2. Poser $X = e^x$: $eX^2 + eX - 2e = 0 \Rightarrow X^2 + X - 2 = 0$
Mêmes solutions que précédemment.

Fin de la séance - Bon travail !