Limites de suites

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

1 Généralités sur les suites

1.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définitions

Une suite (u_n) est :

- **Majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- **Minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- **Bornée** si elle est à la fois majorée et minorée

Exemple

La suite $u_n = \frac{1}{n}$ est :

- Majorée par 1 ($u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$)
- Minorée par 0 ($u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- Donc bornée

1.2 Monotonie d'une suite

Définitions

Une suite (u_n) est :

- **Croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- **Strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$
- **Décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- **Strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$
- **Monotone** si elle est croissante ou décroissante

Exemple

- $u_n = n^2$ est strictement croissante
- $v_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante
- $w_n = (-1)^n$ n'est pas monotone

2 Suites arithmétiques et géométriques

Définitions

- **Suite arithmétique** : $u_{n+1} = u_n + r$ (raison r)

$$u_n = u_0 + nr$$

- **Suite géométrique** : $u_{n+1} = qu_n$ (raison q)

$$u_n = u_0 q^n$$

Exemples

- Suite arithmétique : $u_0 = 2$, $r = 3 \Rightarrow u_n = 2 + 3n$
- Suite géométrique : $u_0 = 1$, $q = 2 \Rightarrow u_n = 2^n$

3 Limites de suites

3.1 Limite finie

Définition

On dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Notation : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

3.2 Limite infinie

Définition

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$$

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si :

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < A$$

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

3.3 Opérations sur les limites

Opérations

— $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$ (si les limites existent)

— $\lim(u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$

— $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (si $\lim v_n \neq 0$)

Exemple

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$$

4 Théorèmes de convergence

Théorèmes

— **Théorème de convergence monotone** :
  — Toute suite croissante majorée converge
  — Toute suite décroissante minorée converge

— **Théorème des gendarmes** : Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim u_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim v_n = \ell$

Exemple

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad \text{car} \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

5 Exercices avec solutions complètes

5.1 Exercice 1

Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$
2. Montrer que (u_n) est croissante
3. Déterminer la limite de (u_n)

Solution Exercice 1

1. **Preuve par récurrence** :
   — Initialisation : $u_0 = 1 \leq 4$
   — Hérédité : Si $u_n \leq 4$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \leq \frac{1}{2} \times 4 + 2 = 4$
2. **Monotonie** :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{1}{2}u_n \geq 2 - \frac{1}{2} \times 4 = 0$$
   Donc (u_n) est croissante.
3. **Limite** :
   — (u_n) est croissante et majorée par 4, donc convergente
   — Soit ℓ la limite, alors $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \Rightarrow \ell = 4$

5.2 Exercice 2

Exercice 2

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+3}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée
2. Étudier la monotonie de (u_n)
3. Déterminer sa limite

Solution Exercice 2

1. **Bornes** :
$$0 < u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+3} \leq \frac{n^2+n^2}{2n^2} = 1$$
Donc (u_n) est bornée par 0 et 1.
2. **Monotonie** :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2+3} - \frac{n^2+1}{2n^2+3} = \frac{-n^2-2n+5}{(2n^2+4n+5)(2n^2+3)}$$
Le signe dépend de $-n^2-2n+5$:
   - Pour $n=1$: $-1-2+5=2>0$
   - Pour $n=2$: $-4-4+5=-3<0$

   Donc (u_n) n'est pas monotone à partir d'un certain rang.
3. **Limite** :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

5.3 Exercice 3

Exercice 3

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$
2. Montrer que (u_n) est croissante
3. Déterminer sa limite

Solution Exercice 3

1. **Bornes** (par récurrence) :
   - Initialisation : $u_0 = 1 \in [1,2]$
   - Hérédité : Si $1 \leq u_n \leq 2$, alors $1 \leq \sqrt{u_n+2} \leq \sqrt{4} = 2$
2. **Monotonie** :
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = \frac{u_n+2-u_n^2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$$
Le numérateur $2+u_n-u_n^2 \geq 0$ car $u_n \in [1,2]$. Donc (u_n) est croissante.
3. **Limite** :
   - (u_n) est croissante et majorée par 2, donc convergente
   - Soit ℓ la limite, alors $\ell = \sqrt{\ell+2} \Rightarrow \ell^2 = \ell+2$
   - Solutions : $\ell = 2$ ou $\ell = -1$ (exclue car $u_n \geq 1$)
   - Donc $\ell = 2$

5.4 Exercice 4

Exercice 4

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{2^n+3^n}{5^n}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
2. Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang

Solution Exercice 4

1. **Limite** :
$$u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$$
Comme $\frac{2}{5} < 1$ et $\frac{3}{5} < 1$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + 0 = 0$$
2. **Monotonie** :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{2^n+3^n} = \frac{2\times 2^n + 3\times 3^n}{5(2^n+3^n)}$$
$$= \frac{2\times(\frac{2}{3})^n + 3}{5((\frac{2}{3})^n+1)} \to \frac{3}{5} < 1$$
Donc à partir d'un certain rang, $u_{n+1} < u_n$.

5.5 Exercice 5

Exercice 5

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{u_n+3}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 2$
2. Montrer que (u_n) est croissante
3. Déterminer sa limite

Solution Exercice 5

1. **Bornes** (par récurrence) :
   — Initialisation : $u_0 = 0 \in [0,2]$
   — Hérédité : Si $0 \le u_n \le 2$, alors :
$$u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{u_n+3} \in \left[\frac{4}{3}, \frac{10}{5}\right] = \left[\frac{4}{3}, 2\right] \subset [0,2]$$
2. **Monotonie** :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+4}{u_n+3} - u_n = \frac{4-u_n^2}{u_n+3} \ge 0$$
car $u_n \in [0,2]$. Donc (u_n) est croissante.
3. **Limite** :
   — (u_n) est croissante et majorée par 2, donc convergente
   — Soit ℓ la limite, alors $\ell = \frac{3\ell+4}{\ell+3} \Rightarrow \ell^2 = 4$
   — Solutions : $\ell = 2$ ou $\ell = -2$ (exclue car $u_n \ge 0$)
   — Donc $\ell = 2$

5.6 Exercice 6

Exercice 6

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{n\cos(n)}{n^2+1}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée
2. Déterminer sa limite
3. Étudier la monotonie de (u_n)

Solution Exercice 6

1. **Bornes** :
$$|u_n| = \left|\frac{n\cos(n)}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1$$
Donc (u_n) est bornée par -1 et 1.
2. **Limite** :
$$|u_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$$
Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. **Monotonie** : La suite n'est pas monotone car $\cos(n)$ oscille entre -1 et 1.

Fin du cours - Bon travail !