Limites et dérivation (Rappel)

Niveau : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

Sommaire

1 Limites des fonctions x^n et $\sqrt{x}$ et leurs inverses

Limites fondamentales

— $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

— $\lim\limits_{x\to0}x^n=0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

Pour n pair :

— $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=+\infty$

— $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$

Pour n impair :

— $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty$

— $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$

Exemples

— $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ (impair)

— $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ (pair)

— $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$

— $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$

2 Limites des fonctions polynômes et rationnelles

2.1 Limite d'une fonction polynôme

Propriété

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré.

Exemple

Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

2.2 Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^3+4}$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

3 Limites des fonctions trigonométriques

Limites remarquables

— $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$
— $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$
— $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Exemple

Calculer $\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x}$:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3\times1 = 3$$

4 Limites des fonctions de type $\sqrt{u(x)}$

Propriétés

— Si $\lim_{x\to x_0} u(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x\to x_0} \sqrt{u(x)} = \sqrt{l}$
— Si $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} \sqrt{u(x)} = +\infty$

Ces résultats restent valables à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exemple

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

5 Théorème de comparaison

Théorèmes

- **Théorème des gendarmes** : Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim f = \lim h = l$, alors $\lim g = l$.
- **Comparaison** : Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim f = +\infty$, alors $\lim g = +\infty$.

Ces résultats restent valables à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

6 Limites et opérations

Opérations sur les limites

- $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$
- $\lim(f \times g) = \lim f \times \lim g$
- $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f}{\lim g}$ (si $\lim g \neq 0$)

Ces résultats restent valables à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

7 La dérivabilité

7.1 Fonction dérivable en un point

Définition

Une fonction f est dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et est finie.}$$

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$.

7.2 Dérivée des fonctions usuelles

Dérivées usuelles

Fonction	**Dérivée**
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

7.3 Opérations sur les dérivées

Règles de dérivation

— $(u+v)' = u' + v'$
— $(ku)' = ku'$ $(k \in \mathbb{R})$
— $(uv)' = u'v + uv'$
— $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
— $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
— $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$
— $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
— $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

7.4 Dérivée et sens de variation

Théorème

Soit f dérivable sur un intervalle I :
— f croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$
— f décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$
— f constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) = 0$

8 Exercices avec solutions

8.1 Exercice 1 : Calcul de limites

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto (x+1)^2|x^2-1|$
1. Étudier la limite de f en $x_0 = -1$
2. Calculer les limites suivantes :

— $A = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x}$
— $B = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$
— $C = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$
— $D = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$
— $E = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$
— $F = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$
— $G = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$
— $H = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$
— $I = \lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

Solution Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$
2. — $A = +\infty$
   — $B = +\infty$
   — $C = +\infty$
   — $D = +\infty$
   — $E = +\infty$
   — $F = -\frac{1}{2}$
   — $G = 0$
   — $H = -\infty$
   — $I = \frac{2}{3}$ (par conjugué)

8.2 Exercice 2 : Calcul de limites

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $A = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^5-5}$
2. $B = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2-x-4}{\sqrt{x+5}+2x}$
3. $C = \lim_{x \to 3} \frac{10-5x}{x^2-6x+9}$
4. $D = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5x^3+x}-1}{2x-1}$
5. $E = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^4-2x^3+1} - x$
6. $F = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2-x+1} + 3x$

Solution Exercice 2

1. $A = 0$
2. $B = -2$
3. $C = -\infty$
4. $D = +\infty$
5. $E = +\infty$
6. $F = -\infty$

8.3 Exercice 3 : Limites trigonométriques

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $A = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+2} - 2x$
2. $B = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(5x)}{x\sin(3x)}$
3. $C = \lim_{x \to 2} \frac{\tan(x-2)}{x^2-4}$
4. $D = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5}-3}$

Solution Exercice 3

1. $A = 0$
2. $B = \frac{25}{6}$
3. $C = \frac{1}{4}$
4. $D = -\frac{4}{3}$

8.4 Exercice 4 : Dérivation et variations

Exercice 4

Pour chaque fonction :

1. Déterminer la fonction dérivée
2. Étudier sa monotonie

1. $f(x) = x^2 + 3x + 1$
2. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x^3}{3}$
3. $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Solution Exercice 4

1. — $f'(x) = 2x + 3$
   — Croissante sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$, décroissante sur $]-\infty, -\frac{3}{2}]$
2. — $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^2$
   — Toujours croissante sur $]0, +\infty[$
3. — $f'(x) = \frac{2}{(2x-1)^2}$
   — Croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, +\infty[$
4. — $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
   — Décroissante sur $]-\infty, -2]$, croissante sur $[2, +\infty[$

Fin de la séance - À vos calculs !