

# Nombres Complexes - Partie 1

Niveau : 2ème Bac SPC-SVT-STE-STM

Prof : AIT MAMA MOHAMED

## Sommaire

- I. Introduction aux nombres complexes
- II. Présentation géométrique
- III. Conjugué d'un nombre complexe
- IV. Module d'un nombre complexe
- V. Argument d'un nombre complexe
- VI. Forme trigonométrique
- VII. Opérations sur les formes trigo
- VIII. Exercices avec solutions

## 1 Introduction aux nombres complexes

### 1.1 Définitions

#### Définitions

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

où  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ .

L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ .

**Égalité :**

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

#### Exemple

$z_1 = 3 + 4i$  et  $z_2 = 1 - i$  sont des nombres complexes.

$3 + 4i = x + yi \Rightarrow x = 3 \text{ et } y = 4$ .

### 1.2 Vocabulaire

#### Terminologie

Pour  $z = a + ib$  :

- $a$  est la **partie réelle** (notée  $\text{Re}(z)$ )
- $b$  est la **partie imaginaire** (notée  $\text{Im}(z)$ )
- La forme  $a + ib$  est la **forme algébrique**
- Le **conjugué** de  $z$  est  $\bar{z} = a - ib$

**Exemple**

Pour  $z = 2 - 5i$  :

- $\operatorname{Re}(z) = 2$
- $\operatorname{Im}(z) = -5$
- $\bar{z} = 2 + 5i$

**1.3 Opérations dans  $\mathbb{C}$** **Opérations algébriques**

Pour  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  :

- **Addition** :  $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- **Multiplication** :  $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- **Inverse** :  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

**Exemple**

Calculer  $(1 + 2i)(3 - i)$  :

$$= (3 + 2) + i(-1 + 6) = 5 + 5i$$

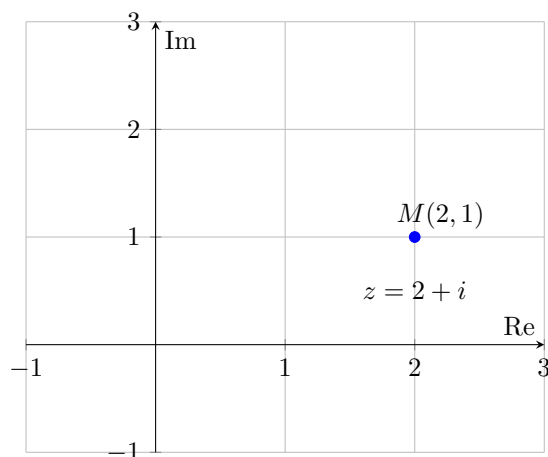
Calculer  $\frac{1}{1+i}$  :

$$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

**2 Présentation géométrique****2.1 Introduction****Représentation**

À tout complexe  $z = x + iy$ , on associe le point  $M(x, y)$  dans un repère orthonormé.

- Le plan est appelé **plan complexe**
- $M$  est l'**image** de  $z$
- $z$  est l'**affixe** de  $M$



## 2.2 Propriétés des affixes

### Propriétés géométriques

Pour  $A(z_A)$ ,  $B(z_B)$ ,  $C(z_C)$  :

- Vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $z_B - z_A$
- Milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour affixe  $\frac{z_A + z_B}{2}$
- Alignement :  $A, B, C$  alignés  $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

### Exemple

Soient  $A(1 + i)$ ,  $B(3 - i)$ ,  $C(5 - 3i)$ . Montrer qu'ils sont alignés :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - 4i}{2 - 2i} = 2 \in \mathbb{R}$$

## 3 Conjugué d'un nombre complexe

### 3.1 Définition

#### Définition

Pour  $z = x + iy$ , le **conjugué** est :

$$\bar{z} = x - iy$$

### Exemple

$$\begin{aligned}\overline{3 + 4i} &= 3 - 4i \\ \overline{-2i} &= 2i\end{aligned}$$

### 3.2 Propriétés

#### Propriétés

Pour  $z, z' \in \mathbb{C}$  :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

### Exemple

Vérifier pour  $z = 1 + i$  et  $z' = 2 - i$  :

$$\overline{z \times z'} = \overline{(1 + i)(2 - i)} = \overline{3 + i} = 3 - i$$

$$\bar{z} \times \bar{z}' = (1 - i)(2 + i) = 3 - i$$

## 4 Module d'un nombre complexe

## 4.1 Définition

### Définition

Pour  $z = x + iy$ , le **module** est :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### Exemple

$$\begin{aligned} |3 + 4i| &= \sqrt{9 + 16} = 5 \\ |1 - i| &= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

## 4.2 Propriétés

### Propriétés

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Inégalité triangulaire :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- Distance :  $AB = |z_B - z_A|$

### Exemple

Pour  $z = 1 + i$  et  $z' = 2 - i$  :

$$\begin{aligned} |z \times z'| &= |3 + i| = \sqrt{10} \\ |z| \times |z'| &= \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

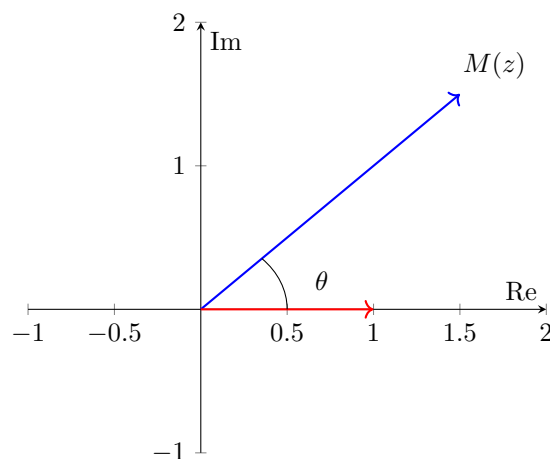
## 5 Argument d'un nombre complexe

### 5.1 Définition

#### Définition

Pour  $z \neq 0$ , un **argument**  $\theta$  est une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  :

$$\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$$



## 5.2 Propriétés

### Propriétés

Pour  $z, z' \neq 0$  :

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$

### Exemple

Pour  $z = 1 + i$  ( $\arg = \pi/4$ ) et  $z' = \sqrt{3} + i$  ( $\arg = \pi/6$ ) :

$$\arg(z \times z') = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

## 6 Forme trigonométrique

### 6.1 Définition

#### Définition

Pour  $z \neq 0$ , la **forme trigonométrique** est :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$ .

#### Exemple

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ -2i &= 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

### 6.2 Passage algébrique $\leftrightarrow$ trigonométrique

#### Conversion

Pour  $z = x + iy \neq 0$  :

- Vers trigo :  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$
- Vers algébrique :  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$

#### Exemple

Convertir  $z = \sqrt{3} + i$  :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3 + 1} = 2 \\ \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Forme trigo :  $2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

## 7 Exercices avec solutions

## 7.1 Exercice 1 - Forme algébrique

### Exercice 1

Écrire sous forme algébrique :

1.  $z_1 = \frac{1}{2-3i}$
2.  $z_2 = \frac{1-i}{3+i}$
3.  $z_3 = \frac{2i}{1-2i} + \frac{(1+i)^2}{i}$

### Solution Exercice 1

1.  $z_1 = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$
2.  $z_2 = \frac{(1-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{2-4i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
3.  $z_3 = \frac{2i(1+2i)}{5} + \frac{2i}{i} = \frac{-4+2i}{5} + 2 = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$

## 7.2 Exercice 2 - Forme trigonométrique

### Exercice 2

Donner une forme trigonométrique pour :

1.  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2.  $z_2 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$
3.  $z_3 = (1-i)(-\sqrt{3}+i)$

### Solution Exercice 2

1.  $|z_1| = 1$ ,  $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$   
Forme trigo :  $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$
2.  $|z_2| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$   
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{6}$   
Forme trigo :  $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})$
3.  $z_3 = (-\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}+1)$   
 $|z_3| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = 2\sqrt{2}$   
 $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}+1}\right) = \frac{5\pi}{12}$   
Forme trigo :  $2\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12})$

## 7.3 Exercice 3 - Géométrie complexe

### Exercice 3

Soient  $A(2-2i\sqrt{3})$ ,  $B(2+2i\sqrt{3})$ ,  $C(8)$ .

1. Donner les formes trigonométriques de  $z_A, z_B, z_C$
2. Calculer  $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$
3. Dédire la nature du triangle  $ABC$

**Solution Exercice 3**

1. —  $|z_A| = 4, \arg(z_A) = -\frac{\pi}{3}$   
 —  $|z_B| = 4, \arg(z_B) = \frac{\pi}{3}$   
 —  $|z_C| = 8, \arg(z_C) = 0$
2.  $Z = \frac{-6+2i\sqrt{3}}{-6-2i\sqrt{3}} = \frac{(-6+2i\sqrt{3})(-6+2i\sqrt{3})}{36+12} = \frac{24-24i\sqrt{3}}{48} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3.  $|Z| = 1$  et  $\arg(Z) = -\frac{\pi}{3}$   
 Donc  $\frac{AB}{CB} = 1$  et  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$   
 Le triangle est équilatéral.

**Fin de la séance - Bon travail !**