Exercice 1

1. Soit p un nombre premier $p > 2$.
   (a) Montrer que p est de la forme $4k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou bien de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que si $p \geq 5$ alors p^2-1 est divisible par 24.
2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   (a) Montrer que si n est un entier naturel non nul, alors il existe toujours un nombre premier strictement compris entre n et $n!+2$. (ind. considérer les diviseurs premiers de $n!+1$).
   (b) En déduire que $\mathcal{P}$ est infini.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n}+1$.
   (a) Montrer, si $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > m$, que F_n et F_m sont premiers entre eux. (ind. exprimer F_n en fonction de F_m).
   (b) Retrouver à l'aide du (a) le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.
4. Soit $\mathcal{E} = \{4k-1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathcal{E}$, il existe $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ tel que p divise n.
   (b) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k-1$ tel que $k \in \mathbb{N}^*$.

Correction 1

1 a) • 1^{ere} cas : si $p \equiv 0[4]$ donc 4 divise p , c'est absurde car p est primier
• 2^{eme} cas : si $p \equiv 1[4]$ donc $p-1 \equiv 0[4]$ alors 4 divise $p-1$ d'où $\exists k \in \mathbb{N}, p = 4k+1$
• 3^{eme} cas : si $p \equiv 2[4]$ donc 2 divise p , c'est absurde (car p est primier et $p > 2$)
• 4^{eme} cas : si $p \equiv 3[4]$ donc $p+1 \equiv 0[4]$ alors 4 divise $p+1$ d'où $\exists k \in \mathbb{N}, p = 4k-1$

Donc p de la forme $4k-1$ ou bien de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

b) ■ si $p = 4k-1$ alors $p^2-1 = 8k(2k-1)$
✔ si $k \equiv 0[3]$ donc $3 \mid p^2-1$. De plus on a $8 \mid p^2-1$ alors 24 divise p^2-1
✔ si $k \equiv 1[3]$ donc $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 3k'+1$ donc $p = 4k-1 = 4(3k'+1)-1 = 3\,(4k'+1)$, c'est absurde car p est primier et $p \geq 5$.
✔ si $k \equiv 2[3]$ donc $2k-1 \equiv 0[3]$ donc $3 \mid p^2-1$ et comme $8 \mid p^2-1$ alors 24 divise p^2-1

■ si $p = 4k+1$ alors $p^2-1 = 8k(2k+1)$
✔ si $k \equiv 0[3]$ donc $3 \mid p^2-1$. puisque $8 \mid p^2-1$, alors 24 divise p^2-1
✔ si $k \equiv 1[3]$ donc $2k+1 =\equiv 0[3]$ donc $3 \mid p^2-1$. De plus $8 \mid p^2-1$ donc 24 divise p^2-1
✔ si $k \equiv 2[3]$ donc $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 3k'+2$ donc $p = 4k-1 = 4(3k'+2)-1 = 3\,(4k'+3)$, c'est absurde car p est primier et $p \geq 5$.

Finalement p^2-1 est divisible par 24

2 a) Comme $n!+1 \geq 2$ donc il existe un nombre premier p tel que $p|n!+1$
par l'absurde , on suppose que $p \leq n$ donc $p \mid n!$, puisque $p \mid n!+1$ alors $p \mid n!+1-n!$ donc $p \mid 1$ donc $d = 1$. c'est absurde car 1 n'est pas premier
Donc : $n < p \leq n!+1$

D'où : $\boxed{n < p < n! + 2}$

b) Par l'absurde , supposons que $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_m\}$ est finie et on pose $n = p_1 \times ... \times p_m$. Donc d'apres $\left(\text{question } \boxed{2}\, a)\right)$ il existe $p_i \in \mathcal{P}$ tel que $p_1 \times ... \times p_m < p_i$ donc $p_1 \times .. \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times ... \times p_m < 1$. Absurde car $p_j > 2 \quad \forall j \in \{1, ..., m\}$
D'où $\mathcal{P}$ est infini

$\boxed{3}$ a) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$ on a :

$$\begin{aligned} F_n = 2^{2^n} + 1 = 2^{2^m \times 2^{n-m}} + 1 \\ &= \left(2^{2^m}\right)^{2^{n-m}} + 1 \\ &= (F_m - 1)^{2^{n-m}} + 1 \\ &= 2 + F_m \times \sum_{k=0}^{2^{n-m}} C_{2^{n-m}}^{k+1} F_m^k \end{aligned}$$

On pose $d = F_n \wedge F_m$ donc

$$\begin{aligned} d \mid F_m \text{ et } d \mid F_n &\Rightarrow d \mid \left(F_m \sum_{k=0}^{2^{n-m}} C_{2^{n-m}}^{k+1} F_m^k\right) \text{ et } d \mid F_n \\ &\Rightarrow d \mid F_n - 2 \text{ et } d \mid F_n \quad \left(\text{car} 2 + F_m \times \sum_{k=0}^{2^{n-m}} C_{2^{n-m}}^{k+1} F_m^k = F_n\right) \\ &\Rightarrow d \mid 2 \\ &\Rightarrow d = 1 \text{ ou } d = 2 \\ &\Rightarrow d = 1 \qquad \text{car } F_n \text{ est impair pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{F_n \wedge F_m = 1}$

$\boxed{4}$ Soit $n \in \varepsilon$

a) Par l'absurde , on suppose que tous les nombres premiers p divisant n sont de la forme $4k + 1$ donc $p \equiv 1[4]$ alors $n \equiv 1[4]$
D'autre part $\exists k' \in \mathbb{N}^*$ tq $n = 4k' - 1 \quad (\text{car } n \in \varepsilon)$ donc $n \equiv -1[4]$
Donc $1 \equiv -1[4]$. Absurde
Alors $p \in \varepsilon$. D'où $p \in \mathcal{P} \cap \varepsilon$

b) Supposons qu'il n'y en ait qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1 p_2 ... p_m$.
Considérons $n = 4p_1 p_2 ... p_m - 1 \in \varepsilon$. Donc d'aprés question **a)** il existe $p \in \mathcal{P} \cap \varepsilon$ tel que $p|n$ donc $p \mid 4p_1 p_2 ... p_m - 1$. De plus on a $p \mid 4p_1 p_2 ... p_m$ donc $p \mid 1$. Absurde
D'où le résultat .

Exercice 2

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I : Soit l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\} ; z \longmapsto \dfrac{iz+i}{z-1}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer, en précisant leurs natures géométriques, les ensembles $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, $f(i\mathbb{R})$
3. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Déterminer, en précisant sa nature géométrique, l'ensemble $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Partie II : On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives:

$$z_A = 1 - 2i, z_B = 3 - i, z_{A'} = -2 + 4i \text{ et } z_{B'} = 5i$$

4. Placer ces quatres points dans le plan, et montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.
5. Soit g la similtude $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ telle que $g(z_A) = z_{A'}$ et $g(z_B) = z_{B'}$.
   (a) Déterminer les complexes a et b sous leurs formes algébriques.
   (b) Déterminer la nature et une équation cartésienne de l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $g(z) = z$.
   (c) Représenter graphiquement (Δ) sur la même figure que les points A, B, B' et A'.
   (d) Reconnaissez-vous la nature de g?

Correction 2

1 Montrons que f est bejictive .

✔ Soient z et z' dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} f(z) = f(z') &\Leftrightarrow \frac{iz+i}{z-1} = \frac{iz'+i}{z'-1} \\ &\Leftrightarrow (iz+i)(z'-1) = (iz'+i)(z-1) \\ &\Leftrightarrow izz' - iz + iz' - i = iz'z - iz' + iz - i \\ &\Leftrightarrow 2z = 2z' \\ &\Leftrightarrow z = z' \end{aligned}$$

Donc f est injective

✔ Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et $z' \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} f(z') = z &\Leftrightarrow \frac{iz'+i}{z'-1} = z \\ &\Leftrightarrow iz' + i = zz' - z \\ &\Leftrightarrow z'(z-i) = z + i \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{z+i}{z-i} \quad (\text{ car } z \neq i) \end{aligned}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $\exists z' = \dfrac{z+i}{z-i} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $f(z') = z$.
D'où f est surjective
finalement , f est bejictive (surjective + injective)

2 ✔ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ On a :

$$f(x) = \frac{xi+i}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}i$$

et comme $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $\dfrac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc :

$$\boxed{f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R} \setminus \{i\}}$$

D'où l'esemble $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$ est : L'axe des imaginaires purs privé du point d'affixe i

✔ Soit $z \in i\mathbb{R}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $z = xi$ On a :

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{zi+i}{z-1} &= \frac{-x+i}{xi-1} \\ &= \frac{(x-i)(1+ix)}{1+x^2} \\ &= \frac{ix^2+2x-i}{1+x^2} \\ &= \frac{2x}{1+x^2} + i\frac{x^2-1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$|f(z)| = \sqrt{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)^2} = 1$$

D'où $f(i\mathbb{R}) = C(O,1)$ cercle de centre O et de rayon 1

3 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ donc $z\overline{z} = |z| = 1$ donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$

On a

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} = -\frac{i\overline{z}+i}{\overline{z}-1} &= -\frac{\frac{1}{z}i+i}{\frac{1}{z}-1} \\ &= -\frac{i+iz}{1-z} = \frac{iz+1}{z-1} \\ &= f(z) \end{aligned}$$

donc $\quad \overline{f(z)} = f(z)$

D'où l'ensemble $f(\mathbb{U})$ est : L'axe des réel privé du point d'affixe 1

4 On a $z_A = 1-2i \quad , \quad z_B = 3-i \quad , \quad z_{A'} = -2+4i \quad$ et $\quad z_{B'} = 5i$

donc $z_{\overrightarrow{AB}} = 2+i \quad$ et $\quad z_{\overrightarrow{A'B'}} = 2+i$

Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

De plus on a :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA'}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z_{B'}-z_B}{z_A-z_B}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{6i-3}{2+i}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(3i)\ [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

D'où $ABA'B'$ est un rectangle

5

a) On a

$$\begin{cases} g(z_A) = z_{A'} \\ g(z_B) = z_{B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\overline{z_A} + b = z_{A'} \\ a\overline{z_B} + b = z_{B'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(1+2i) + b = -2+4i \\ a(3+i) + b = 5i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + 2ai = -2 + 4i & ① \\ 3a + b + ai = 5i & ② \end{cases}$$

$$\overset{②-①}{\Rightarrow} \begin{cases} 2a - ai = 2 + i \\ b = -2 + 4i - 2ai - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2+i}{2-i} \\ b = -2 + 4i - 2ai - a \end{cases}$$

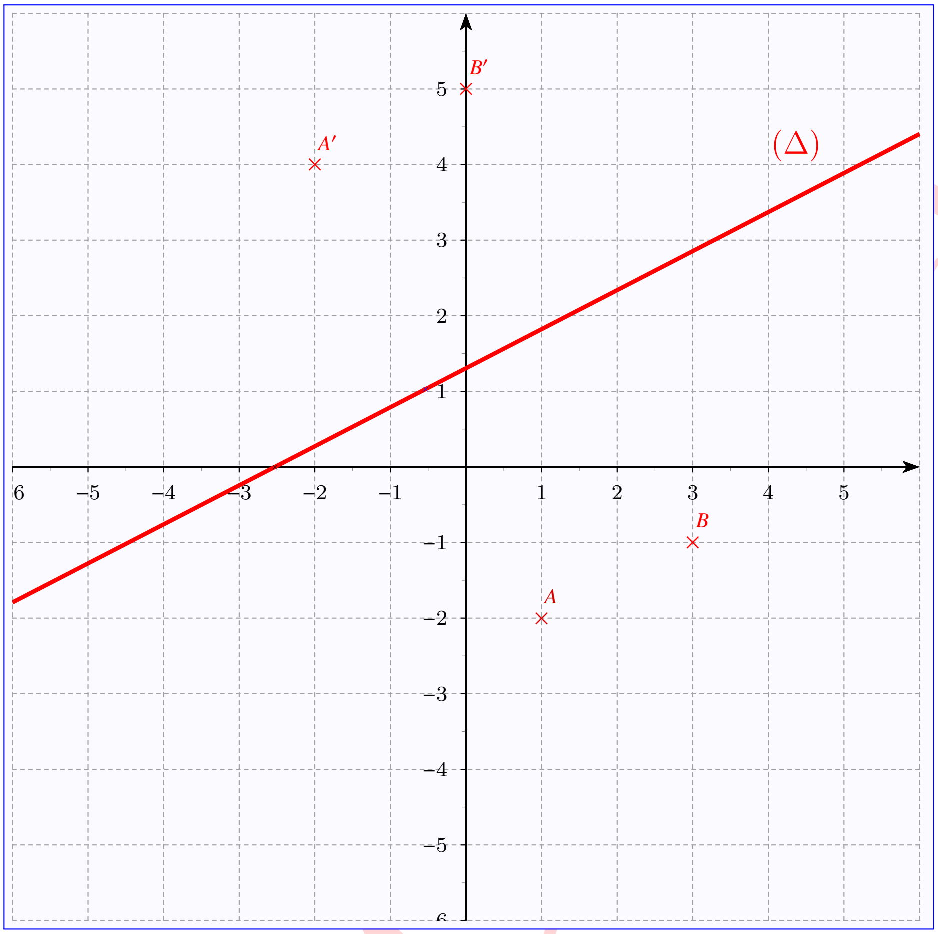
$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5} \\ b = -1 + 2i \end{cases}$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ On a :

$$\begin{aligned} g(z) = z &\Rightarrow a\bar{z} + b = z \\ &\Rightarrow \left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)(x - iy) - 1 + 2i = x + iy \\ &\Rightarrow (3+4i)(x-iy) - 5 + 10i = 5x + 5yi \\ &\Rightarrow 3x - 3yi + 4xi + 4y - 5 + 10i = 5x + 5yi \\ &\Rightarrow 4y - 2x - 5 + (4x - 8y + 10)\,i = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4y - 2x - 5 = 0 \\ 4x - 8y + 10 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2x - 4y + 5 = 0 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble Δ est une droit d'équation : $\boxed{2x - 4y + 5 = 0}$

c)



d) La nature de g : Symétrie axiale

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction G_f sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[: G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G_f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. Déterminer la fonction G_f pour f constante égale à 1.

3. Dans cette question on suppose que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0^+ :

$$\forall t \in]0,+\infty[: f(t) = a + bt + ct^2 + t^2\varepsilon(t)$$

avec ε fonction continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \varepsilon(t) = 0$.

Déterminer le développement limité en 0^+ à l'ordre 2 de G_f.

4. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} G_f(x) = 0$.

Dans la suite on note G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[: G(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. Calculer la dérivée de G et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0, 2\pi]$.

6. Ecrire le développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 2 en 0, et en déduire celui de la fonction G.

7. Montrer alors que G est prolongeable par continuité en une fonction dérivable, puis déterminer la position de la courbe de G par rapport à sa tangente en 0.

8. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$G(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.

10. Construire l'allure du graphe de G sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
On donne les valeurs approchées suivantes:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \simeq -0.67; \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \simeq -0.06; \int_{3\frac{\pi}{2}}^{9\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \simeq 0.27;$$

$$\int_{2\pi}^{6\pi} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \simeq 0.02; \ln 3 \simeq 1.10.$$

Correction 3

1 La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, alors G_f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

▹ Soit $x \in]0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}(G_f(x))' &= \left(\int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}dt\right)' \\ &= (3x)' \times \frac{f(3x)}{3x} - (x)' \times \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{f(3x) - f(x)}{x}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad (G_f(x))' = \dfrac{f(3x) - f(x)}{x}}$

2 si la fonction f est constante égale à 1 , alors $\forall t \in]0,+\infty[\quad , \quad f(t) = 1$

▹ Soit $x \in]0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}G_f(x) &= \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}dt \\ &= \int_x^{3x} \frac{1}{t}dt \\ &= [\ln t]_x^{3x} \\ &= \ln(3x) - \ln(x) \\ &= \ln(3)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{G_f(x) = \ln 3}$

3 On suppose que f admet un développement limité à l'orde 2 en 0^+

$$\forall \in]0,+\infty[\quad : \quad f(t) = a + bt + ct^2 + t^2\varepsilon(t)$$

Alors

$$\begin{aligned}G_f(x) &= \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}dt \\ &= \int_x^{3x} \frac{a + bt + ct^2 + t^2\varepsilon(t)}{t}dt \\ &= a\int_x^{3x} \frac{1}{t}dt + \left[bt + \frac{ct^2}{2} + t^2\varepsilon(t)\right]_x^{3x} \\ &= a\ln(3) + 2bx + 4cx^2 + x^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{G_f(x) = a\ln(3) + 2bx + 4cx^2 + x^2\varepsilon(x)}$

4 On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, donc d'après la définition de la limite : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : t > \alpha \Rightarrow |f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{\ln(3)}$

Alors ,

$$\begin{aligned}
\left|G_f(x)\right| &= \left|\int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}dt\right| \\
&\Rightarrow \left|G_f(x)\right| \leq \int_x^{3x} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt \\
&\Rightarrow \left|G_f(x)\right| < \int_x^{3x} \frac{\varepsilon}{ln(3)t}dt \\
&\Rightarrow \left|G_f(x)\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : x > \alpha \Rightarrow |G_f(x)| < \varepsilon$

D'où $\boxed{\lim_{t \to +\infty} G_f(x) = 0}$

$\boxed{4}$ On a d'après $\boxed{3}$:

$$\begin{aligned}
(G_f(x))' &= \frac{f(3x) - f(x)}{x} \\
&= \frac{\cos(3x) - \cos(x)}{x} \\
&= \frac{-2\sin(2x)\sin(x)}{x} \qquad \left(\text{car } \cos p - \sin q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin(x)$	0	+		+	0	−		−	0
$\sin(2x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0
$(G_f(x))$'	0	−	0	+	0	+		−	0

donc

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$(G_f(x))$'	0	−	0	+	0	+		−	0
Variations de G_f		↘			↗			↘	

$\boxed{6}$ La fonction $t \mapsto \cos t$ est de classe C^2 et nous connaissons son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 : $\forall \in]0, +\infty[\quad : \quad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$

Donc d'après $\boxed{3}$

$$\begin{aligned}
G_f(x) &= a\ln(3) + 2bx + 4cx^2 + x^2\varepsilon(x) \\
&= \ln(3) - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{G_f(x) = \ln(3) - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)}$$

7 • Au voisinage de 0 on a : $G_f(x) = \ln(3) - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0} G_f(x) = \lim_{x\to 0} \ln(3) - 2x^2 + x^2\varepsilon(x) = \ln(3)$$

Alors G est prolongeable par continuité en une fonction $\widehat{G}_f$ définie par : $\begin{cases} \widehat{G}_f(x) = G_f(x) & \text{si} x > 0 \\ \widehat{G}_f(0) = \ln(3) \end{cases}$.

De plus on a $\widehat{G}'_f(0) = 0$ alors l'équation de la tangente (Δ) en 0 est : $y = ln(3)$

puisque $\left|\widehat{G}_f(x)\right| \leq \ln(3)$. D'où la courbe de G_f existe sous l'asymptote (Δ)

8 Connaissant une primitive de $t \mapsto \cos t$, on pense à l'intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} G_f(x) &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{}{t^2} dt \end{aligned}$$

D'où $$\boxed{G_f(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt}$$

9 Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \left|\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt\right| &\leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \\ &\leq \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{3x} \\ &\leq \frac{2}{x} \end{aligned}$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

D'où $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0}$$

- On a

$$G_f(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} G_f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(3x)}{3x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$$

car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$$


بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ
رَبِّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي
وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

مباريات التوظيف بموجب عقود بالنسبة
للتعليم الثانوي بسلكيه الإعدادي والتأهيلي
نونبر 2016
الموضوع

الاختبار	اختبار في مادة التخصص	مدة الإنجاز :	5 ساعات
التخصص	الرياضيات	المعامل	1

Consignes générales

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants les uns des autres. Le candidat est libre de traiter le sujet dans l'ordre qui lui convient à condition de bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie.
Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

Important

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Barème

EXERCICE 1	EXERCICE 2	EXERCICE 3	EXERCICE 4	Total
20 pts	15 pts	20 pts	25 pts	80 pts

EXERCICE 1

1. Soit p un nombre premier $p > 2$.

(a) Montrer que p est de la forme $4k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou bien de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que si $p \geq 5$ alors $p^2 - 1$ est divisible par 24.

2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

(a) Montrer que si n est un entier naturel non nul, alors il existe toujours un nombre premier strictement compris entre n et $n! + 2$. (ind. considérer les diviseurs premiers de $n! + 1$).

(b) En déduire que $\mathcal{P}$ est infini.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

(a) Montrer, si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > m$, que F_n et F_m sont premiers entre eux. (ind. exprimer F_n en fonction de F_m).

(b) Retrouver à l'aide du (a) le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

4. Soit $\mathcal{E} = \{4k - 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathcal{E}$, il existe $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ tel que p divise n.

(b) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k - 1$ tel que $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie I : Soit l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\} ; z \longmapsto \dfrac{iz + i}{z - 1}$

1. Montrer que f est bijective.

2. Déterminer, en précisant leurs natures géométriques, les ensembles $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, $f(i\mathbb{R})$

3. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Déterminer, en précisant sa nature géométrique, l'ensemble $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Partie II : On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives:

$$z_A = 1 - 2i, z_B = 3 - i, z_{A'} = -2 + 4i \text{ et } z_{B'} = 5i$$

4. Placer ces quatres points dans le plan, et montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.

5. Soit g la similtude $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ telle que $g(z_A) = z_{A'}$ et $g(z_B) = z_{B'}$.

(a) Déterminer les complexes a et b sous leurs formes algébriques.

(b) Déterminer la nature et une équation cartésienne de l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $g(z) = z$.

(c) Représenter graphiquement (Δ) sur la même figure que les points A, B, B' et A'.

(d) Reconnaissez-vous la nature de g?

EXERCICE 3

Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction G_f sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[: G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G_f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. Déterminer la fonction G_f pour f constante égale à 1.

3. Dans cette question on suppose que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0^+ :

$$\forall t \in]0,+\infty[: f(t) = a + bt + ct^2 + t^2\varepsilon(t)$$
$$\text{avec } \varepsilon \text{ fonction continue sur }]0,+\infty[\text{ et } \lim_{t\to 0^+} \varepsilon(t) = 0.$$

Déterminer le développement limité en 0^+ à l'ordre 2 de G_f.

4. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} G_f(x) = 0$.

Dans la suite on note G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[: G(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

5. Calculer la dérivée de G et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0,2\pi]$.

6. Ecrire le développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 2 en 0, et en déduire celui de la fonction G.

7. Montrer alors que G est prolongeable par continuité en une fonction dérivable, puis déterminer la position de la courbe de G par rapport à sa tangente en 0.

8. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$G(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

9. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t = 0$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.

10. Construire l'allure du graphe de G sur l'intervalle $[0,2\pi]$.
On donne les valeurs approchées suivantes:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t \simeq -0.67; \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t \simeq -0.06; \int_{3\frac{\pi}{2}}^{9\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t \simeq 0.27;$$
$$\int_{2\pi}^{6\pi} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t \simeq 0.02; \ln 3 \simeq 1.10.$$

EXERCICE 4

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, et T l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in]0,1[: T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1. Vérifier que T est un endomorphisme de E.

2. Calculer la fonction $T(u)$ (en fonction de u) où u est la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall x \in]0,1[: u(x) = \operatorname{cotan} \pi x .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, on pose

$$v_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} \quad \text{et} \quad w_n(x) = v_n(x) - \cancel{\frac{1}{x+n}} + \frac{1}{x-n} .$$

3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$

$$v_n(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - x^2}$$

et que les fonctions v_n et w_n sont continues sur $]0,1[$.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ les suites $(v_n(x))_{n\geq 1}$ et $(w_n(x))_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
On notera $v(x)$ leur limite commune :

$$v(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} .$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est une fonction décroissante sur $]0,1[$, et en déduire que v est aussi décroissante sur $]0,1[$.

6. Déduire de ce qui précède que v est continue sur $]0,1[$.

7. Établir une relation entre $T(v_n)$ et v_{2n} puis en déduire que $T(v) = 2v$.

8. Dans cette question, on considère une fonction f continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall x \in [0,1] : f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

(a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$, qu'on note M, et que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = M$.

(b) En déduire que f atteint son maximum au point 0.

(c) Montrer que f atteint aussi son minimum au point 0. Que peut-on déduire pour la fonction f.

9. Comment choisir le réel a pour que la fonction $f = v - au$ soit pronlongeable en une applicatio $\tilde{f}$ continue et périodique de période 1 sur $\mathbb{R}$?

10. Déduire de tout ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan} \pi x .$$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵓⵔⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

مباريات التوظيف بموجب عقود بالنسبة
للتعليم الثانوي بسلكيه الإعدادي والتأهيلي
نونبر 2016
الموضوع

الاختبار	اختبار في ديداكتيك مادة التخصص وعلوم التربية	مدة الإنجاز :	5 ساعات
التخصص	الرياضيات	المعامل	1

تعليمات عامة

يتكون الاختبار من موضوعين مستقلين فيما بينهما في 7صفحات الأولى منها خاصة بالتعليمات التالية :

1. يرجى من المترشح الإجابة عن أسئلة الاختبار بما يستحقه من دقة وعناية.
2. لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها.
3. لا يسمح باستعمال أي وثيقة خارج الاختبار.
4. يراعى عند التصحيح حسن تقديم ورقة التحرير والكتابة بخط واضح ومقروء.
5. يمكن للمترشح إنجاز أسئلة الاختبار حسب الترتيب الذي يناسبه.

مكونات الاختبار

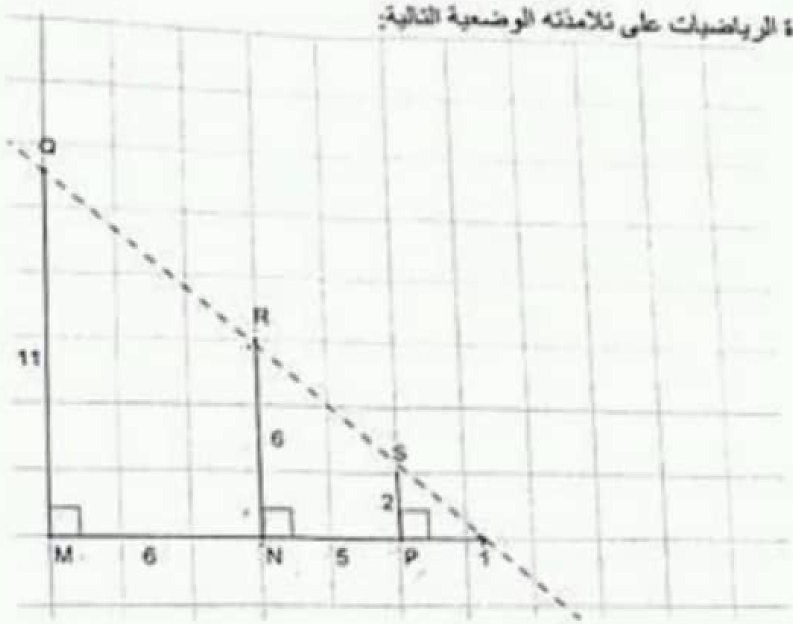
الموضوع الأول	10 نقطة
الموضوع الثاني	10 نقطة

مباريات التوظيف بموجب عقود بالنسبة للتعليم الثانوي بسلكيه الإعدادي والتأهيلي – نونبر 2016
الموضوع
الاختبار : اختبار في ديداكتيك مادة التخصص وعلوم التربية التخصص : الرياضيات

الموضوع الأول:(10 نقط)

الوضعية (1):

اقترح مدرس مادة الرياضيات على تلامذته الوضعية التالية:



أحسب المسافة IN

فيما يلي إنجازات تلميذين :

إنتاج التلميذ الأول	إنتاج التلميذ الثاني
لدينا المستقيمين (NR) و (PS) متوازيين لأنهما عموديين على نفس المستقيم (IM) بتطبيق مبرهنة طاليس المباشرة على المثلث IRN نحصل على $\frac{IP}{IN}=\frac{PS}{NR}$ و بما أن $IN=IP+5$ فإن $\frac{IP}{IP+5}=\frac{2}{6}$ أي أن $6IP=2(IP+5)=2IP+10$ و منه $4IP=10$ و بما أن $IN=IP+5$ فإن $IN=\frac{15}{2}$	بما أن (MQ) و (NR) متوازيان فإنه حسب مبرهنة طاليس المباشرة في المثلث IMQ فإن: $\frac{IN}{IM}=\frac{NR}{MQ}$ و منه $\frac{IN}{IN+6}=\frac{6}{11}$ يعني $11IN=6(IN+6)$ إذن $5IN=36$ و منه $IN=\frac{36}{5}$

ما هو مطلوب من المترشح:

الجزء الأول:

1- حلل نص الوضعية باعتماد العناصر التالية:

- المستوى الدراسي المستهدف من خلال الوضعية.
- الأهداف المتوخاة من وراء تقديم هذه الوضعية.
- المعارف والمهارات التي تتطلبها حل الوضعية.

2- حلل إجابة التلميذين الأول و الثاني باعتماد العناصر التالية:

- صحة ووضوح إنجازات كل تلميذ.
- الأخطاء الواردة في الحل إن وجدت مع تحديد مصادرها المحتملة.
- في نظرك لماذا حصل التلميذان على نتيجتين مختلفتين؟

3- اقترح خطوات لحل الوضعية يمكن تقديمها لتلاميذة السنة الثالثة ثانوي إعدادي و تبرز الهدف من تقديم هذه الوضعية.

الجزء الثاني:

يتطرق برنامج الرياضيات بالتعليم الثانوي بسلكيه الإعدادي و التأهيلي إلى مبرهنة طاليس المباشرة و مبرهنة طاليس العكسية (أنظر الوثائق الملحقة (1) و(2) و(3)).

ما هو مطلوب من المترشح:

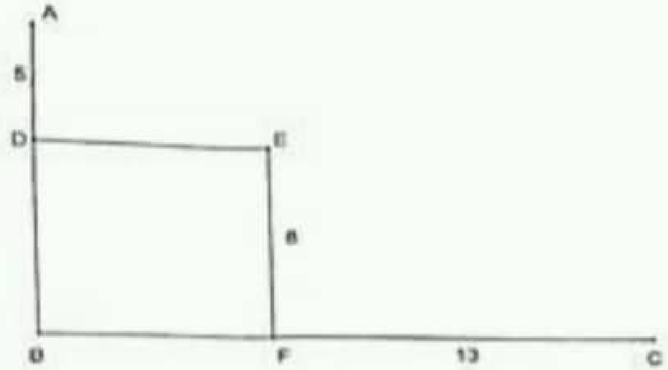
عند تقديم المبرهنتين بمستوى السنة الثالثة ثانوي إعدادي :

- ما هي المكتسبات التي يجب على المتعلم التوفر عليها؟
- ما هي القدرات المنتظرة من درس مبرهنة طاليس؟
- ما هي بعض امتدادات مبرهنة طاليس في المستويات اللاحقة.
- اعط نشاطا بنائيا لتقديم مبرهنة طاليس المباشرة.
- ما هي الصعوبات و المعيقات المنتظرة في تدبير هذا الدرس؟ و كيف يتم معالجتها.
- ما هي وضعيات الدعم و التقوية التي يمكن إعدادها لتجاوز هذه الصعوبات.

الجزء الثالث:

عند انتهاء الأستاذ من تدبير الوضعية (1) اقترح على تلاميذته الوضعية (2)

ليكن $BFED$ مربع طول طلعه 8 و $DA=5$ و $FC=13$



هل النقط A و E و C مستقيمية؟

ما هو مطلوب من المترشح:

1- تقديم طريقتين لحل الوضعية بحيث :

الطريقة الأولى موجهة لتلاميذ السنة الثانية إعدادي

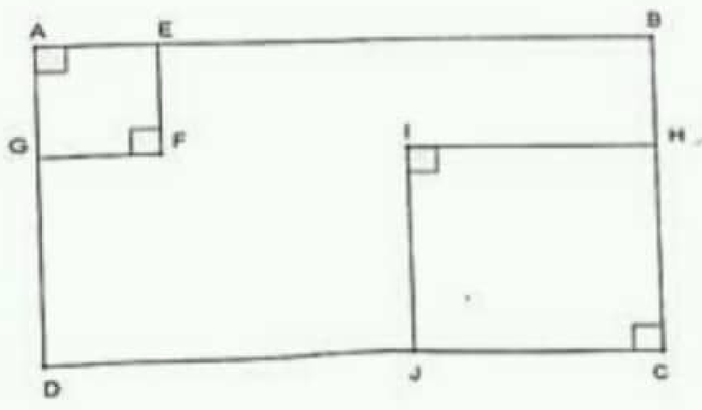
الطريقة الثانية موجهة لتلاميذ السنة الثالثة إعدادي

2- هل الوضعية (2) تفي بتجاوز الإشكالية المطروحة في الوضعية (1)

الموضوع الثاني: (10 نقط)

$ABCD$ مستطيل طوله 8 و عرضه 4 .

$AEFG$ و $IHCJ$ مربعان بحيث النقط G و F و I و H مستقيمية.(أنظر الشكل)



كيف يمكن إنشاء المربعين $AEFG$ و $IHCJ$ بحيث تكون مساحة الجزء المتبقي قصوية؟

A - الإشكالية الأولى بالنسبة للمترشح:

أنت الآن مدرس مادة الرياضيات بالجذع المشترك العلمي و تريد من خلال الوضعية المقترحة وضع سيناريو بيداغوجي الهدف منه تحديد مطراف ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية: $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

يجب أن يتكون هذا السيناريو من المراحل الأربعة التالية:

- **المرحلة الأولى:** هي مرحلة استيعاب التلاميذ للوضعية
- **المرحلة الثانية:** هي مرحلة التجريب باستعمال بعض الأدوات الديديكتيكية المتوفرة.
- **المرحلة الثالثة:** هي مرحلة الترييض
- **المرحلة الرابعة:** هي مرحلة التوليف

ما هو مطلوب من المترشح:

تحديد السيناريو البيداغوجي المستهدف.

B- الإشكالية الثانية بالنسبة للمترشح:

أنت الآن مدرس مادة الرياضيات بمستوى الأولى علوم و تريد من خلال الوضعية المقترحة تهييئ نشاط للتلاميذ.

ما هو مطلوب من المترشح:

1- إنجاز سلسلة من الأسئلة تمكن التلميذ من البرهنة على أن الوضعية المقترحة تؤول في حلها إلى تحديد القيمة القصوى للدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=-2x^2+8x+16$

2- وصف بعض المراحل التي تمكن التلميذ من تخمين هذه القيمة القصوى

3- بين باستعمال فقط المفاهيم و القدرات الواردة في برنامج الرياضيات للسنة الأولى علوم تجريبية أن 24 هي القيمة القصوى المطلوبة.

C- الإشكالية الثالثة بالنسبة للمترشح:

أنت الآن مدرس لمادة الرياضيات بالسنة الثانية من سلك الباكالوريا شعبة العلوم التجريبية و ترغب في توظيف هذه الوضعية في إعداد تمرين تقويمي .

ما هو مطلوب من المترشح:

إعداد تمرين تقويمي باتباع الخطوات المنهجية التالية:

- تحديد القدرات المنتظرة المراد تقويمها و مكانتها و دورها في تكوين التلميذ.
- تحديد المدة الزمنية المخصصة للإنجاز.
- التمييز بين المكتسبات القبلية و الجديدة.
- تحديد سلم تنقيط مدقق لكل مضمون انطلاقا من مدة إنجازه و من أهميته .
- توزيع الأسئلة على المستويات المهارية الثلاثة التالية:

تطبيق مباشر للمعارف في حدود %50

استحضار و تطبيق لمعارف غير معطاة في حدود %30

استحضار و تطبيق و توليف معارف في وضعيات غير مألوفة في حدود %20

انتهى

الوثيقة (1): البرامج و التوجيهات التربوية الخاصة بمادة الرياضيات بسلك التعليم الثانوي الإعدادي-السنة الثانية إعدادي- ص 33

- المستقيم المار من منتصفي ضلعين في مثلث. - مستقيم يوازي ضلع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين.	- معرفة واستعمال المبرهنتين التاليتين: • في كل مثلث المستقيم المار من منتصفي ضلعين يوازي حامل الضلع الثالث؛ • طول القطعة التي تربط منتصفي ضلعين يساوي نصف طول الضلع الثالث؛ - استعمال المبرهنة التالية: في مثلث ABC إذا كان $M\in[AB]$ و $N\in[AC]$ و AB//BC ← MN فإن $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ ، - تقسيم قطعة إلى قطع متقايسة.	- يمكن البرهان على هذه المبرهنات إذا كان مستوى التلاميذ يسمح بذلك وإذا قبلت يجب توضيح ذلك لهم؛ (مبرهنة طاليس ستدرس في السنة الثالثة)؛ - تعتبر هذه الفقرة مناسبة لتوظيف خاصيات متوازي الأضلاع والتماثل المحوري؛

الوثيقة (2): البرامج و التوجيهات التربوية الخاصة بمادة الرياضيات بسلك التعليم الثانوي التأهيلي –الجذع المشترك العلمي و التكنلوجي-ص 20

الإسقاط

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الإسقاط على مستقيم، الإسقاط العمودي، الإسقاط على محور؛ - مبرهنة طاليس المباشرة ومبرهنة طاليس العكسية؛ - الحفاظ على معامل استقامية متجهتين.	- الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس.	- ينبغي تجنب أي بناء نظري لمفهوم الإسقاط. - يتم التذكير بمبرهنة طاليس المباشرة ومبرهنة طاليس العكسية ثم تقديم خاصية حفاظ الإسقاط على معامل استقامية متجهتين من خلال أنشطة.

الوثيقة (3) :البرامج و التوجيهات التربوية الخاصة بمادة الرياضيات بسلك التعليم الثانوي الإعدادي-السنة الثالثة إعدادي- ص 41

2. الهندسة

1.2. مبرهنة طاليس. - المبرهنة المباشرة؛ - المبرهنة العكسية.	معرفة واستعمال المبرهنتين التاليتين في وضعيات مختلفة: - ليكن (D_1) (D_2) و مستقيمان يتقاطعان في النقطة A. لتكن النقطتان B و M من المستقيم (D_1) تختلفان عن النقطة A. لتكن النقطتان C و N من المستقيم (D_2) تختلفان عن A. إذا كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين فإن: $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$ • ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمان يتقاطعان في النقطة A. لتكن النقطتان B و M من المستقيم (D_1) تختلفان عن النقطة A. لتكن النقطتان C و N من المستقيم (D_2) تختلفان عن A. إذا كان $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$ وإذا كانت النقط A و B و M والنقط A و C و N	- تعتبر خاصية طاليس من أهم نتائج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي خاصة والهندسة المستوية عامة - من خلال أمثلة يتم التذكير بالخاصيات التالية: • المستقيم المار من منتصف ضلعي مثلث يوازي حامل الضلع الثالث؛ • المستقيم المار من منتصف ضلع في مثلث والموازي لحامل ضلع آخر يمر من منتصف الضلع الثالث؛ • في مثلث ABC إذا كان $M\in[AB]$ و $N\in[AC]$ و $(MN)\parallel(BC)$ فإن $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ ؛ - تتيح مبرهنة طاليس فرصة أخرى للتمرس على التناسبية (إنشاء طول يكون رابعا متناسبا لثلاثة أطوال، إنشاء طول يكون واسطا هندسيا لطولين)؛ أما المبرهنة العكسية

تصحيح ديداكتيك الرياضيات
الثانوي الإعدادي والتأهيلي
نونبر 2016م

الجزء الأول:

1-

1- مستوى الدراسي: الثالثة ثانوي إعدادي

الأهداف:

- ملاحظة شكل هندسي وترجمته إلى رموز وتطبيق خواص هندسية

- الإستعمال الصحيح لمبرهنة طاليس

(إستقامية النقط شرط ضروري)

- المعارف: تعلم مفاهيم مبرهنة طاليس

- المهارات: القدرة على إستعمال مبرهنة طاليس.

2- كل من التلميذين له تعبير رياضي سليم وإتباع خطوات منهجية

إلا أنهما لم ينتبها للشكل جيدا قبل الإجابة عن السؤال.

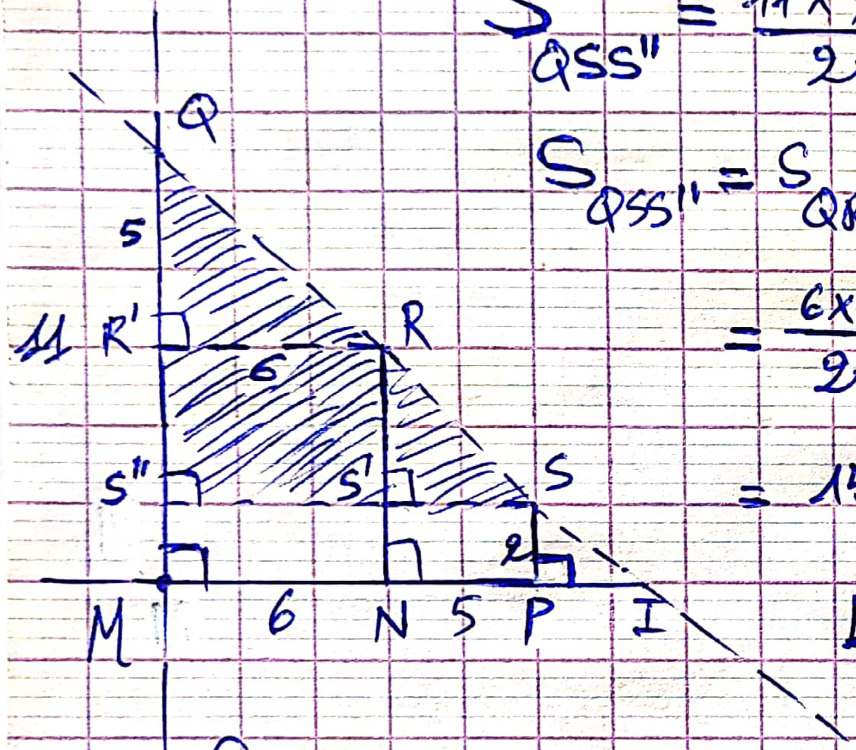
الخطأ: إعتبار النقط P و R و S و T مستقيمية
(لا يمكن تطبيق م. طاليس)

Scanné avec CamScanner

- حصل التلاميذ على نتيجتين مختلفتين نظرا لعدم التحقق من استقامية النقط عند تطبيقهم لمبرهنة طاليس.

- خطوات حل الوضعية :

$$S_{QSS''} = \frac{11 \times 9}{2} = \frac{99}{2} = 49{,}5\ cm^2$$



$$S_{QSS''} = S_{QRR'} + S_{RSS'} + S_{RR'S''S'}$$

$$= \frac{6 \times 5}{2} + \frac{5 \times 4}{2} + 6 \times 4$$

$$= 15 + 10 + 24 = 49$$

بما أن : $49{,}5 \neq 49$

فإن : النقط Q و R و S غير مستقيمة

وبالتالي لا يمكن استعمال مبرهنة طاليس

الجزء الثاني :

← المكتسبات :

* المستقيمات الموازية لأضلاع مثلث.
* التناسبية.
* المعادلات.
* خاصيات متوازي الأضلاع.
* التماثل المحوري.
* الحساب الحرفي

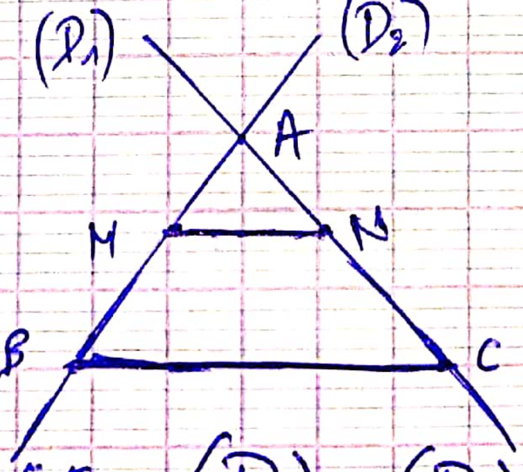
← القدرات المنتظرة :

أنظر الخانة الثانية من الوثيقة 3.

← إمتدادات :

* المثلثات المتشابهة
* الحساب المثلثي (الثالثة إعدادي)
* إسقاط (الجذع المشترك)
* الهندسة الفضائية.

← نشاط بنائي :



ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمين متقاطعين في النقطة A و $N, C \in (D_2)$ و $M, B \in (D_2)$

و $N \neq C$ و $M \neq B$ و $(MN) // (BC)$

1) أحسب $\frac{AM}{AB}$:

2) أحسب $\frac{AN}{BC}$.

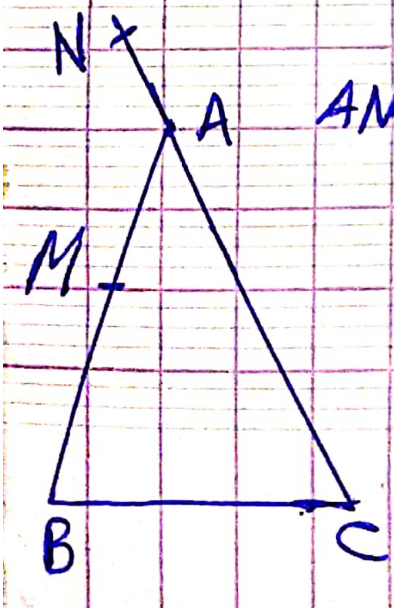
3) أحسب $\frac{MN}{BC}$.

4) ماذا تلاحظ.

← الصعوبات :
إستقامية النقط شرط أساسي وكذلك الترتيب .

← معالجة : وضع أمثلة أثناء الدرس
إعطاء بعض التمارين التي تكون
معالجة لهذه الصعوبات

← وضعية الدعم والتقويم
إستقامية النقط : نشاط الجزء الثالث
ترتيب النقط :
في الشكل المقابل لدينا :



$AN=6$ و $AB=20$ ، $AM=5$ ، $AC=24$

1) لنقارن $\frac{AM}{AB}$ و $\frac{AN}{AC}$

2) هل المستقيم (MN) يوازي (BC)

الجزء الثالث:

1-

الطريقة الأولى مستوى الثانية إعدادي:
بإستعمال مبرهنة فيثاغورس "المباشرة"
نجد أن $AC \neq AE + EC$
وبالتالي النقط A و E و C غير مستقيمية.

الطريقة الثانية مستوى الثالثة اعدادي:
لدينا $(EF) \parallel (AB)$ وبتطبيق مبرهنة طاليس
المباشرة لدينا:

$$\frac{CF}{CB} = \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA}$$

وبما أن:

$$\frac{CF}{CB} = \frac{13}{21} \quad \text{و} \quad \frac{EF}{AB} = \frac{8}{13}$$

و
$$\frac{13}{21} \neq \frac{8}{13}$$

وبالتالي: النقط A و E و C غير مستقيمية.

2- الوضعية (2) تمكن بتجاوز الإشكالية
المطروحة في "الوضعية (1) لأنها
تعالج أهمية إستقامية النقط.

تتمة التصحيح الموضوع الثاني تجدونه مصورا عبر اليوتوب قناة ديداكتيك الرياضيات
https://youtu.be/tJbx3smqGlk