موضوع في مادة الرياضيات:(10 نقط)

EXERCICE 1

Soient $a \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Question 1 Pour toute valeur de a la suite (u_n) est :
(a) croissante. (b) bornée. (c) convergente. (d) décroissante.

Question 2 Si (u_n) admet une limite (finie ou non), alors il est possible que cette limite vaut :
(a) 1. (b) 0. (c) $\pi/2$. (d) $+\infty$.

Question 3 On pose $\gamma = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, alors :

(a) $\gamma = \frac{1}{6}$. (b) $\gamma = \frac{1}{3}$. (c) $\gamma = -\frac{1}{3}$. (d) $\gamma = -\frac{1}{6}$.

Question 4 On suppose $a = \frac{\pi}{4}$. On déduit de la question précédente que :

(a) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\gamma}{n}$. (b) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\gamma n}$. (c) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\gamma}{n}}$. (d) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{\gamma n}}$.

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}, \text{ et l'intégrale } I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 5 Les valeurs de I_0 et I_1 sont données par :
(a) $I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$. (b) $I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$.
(c) $I_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$. (d) $I_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}$.

Question 6 La suite (I_n)
(a) est croissante. (c) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) est décroissante. (d) est convergente.

EXERCICE 3

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Question 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, alors :

(a) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (c) la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (d) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n > 0$.

[redacted]

Question 8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t$ de sorte que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$, alors :

(a) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$

(b) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$

(c) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n} \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$

(d) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$

Question 9 On en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(a) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) est convergente de limite égale à $\frac{\pi}{4}$.

(c) est convergente de limite égale à $\frac{\pi}{2}$.

(d) est convergente de limite égale à 1.

EXERCICE 4

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers ($a_i \in \mathbb{Z}$) tel que $a_0 a_n \neq 0$.

Question 10 On suppose que P admet une racine $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors :

(a) p divise a_0. (b) a_0 divise q. (c) q divise a_n. (d) a_n divise p.

Question 11 On pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, on a :

(a) α est racine du polynôme $8X^3 - 6X + 1$.

(b) α est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$.

(c) α est un irrationnel.

(d) α est racine du polynôme $6X^3 - 8X - 1$.

EXERCICE 5

On considère l'ensemble $\mathbb{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

Question 12 On note $\times$ la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Il existe au moins un élément de $\mathbb{E}$ inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{E}, \times)$.

(c) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{E}, \times)$.

(d) $(\mathbb{E}, \times)$ est un groupe commutatif.

[redacted]

EXERCICE 6

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on considère la transformation σ qui à chaque point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -3\bar{z} + 4 - 2i.$$

Question 13 σ est alors la composée :

(a) d'une symétrie axiale et d'une homothétie.

(b) d'une symétrie axiale et d'une rotation.

(c) d'une translation et d'une symétrie axiale.

(d) d'une translation et d'une rotation.

Question 14 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(-1)$ et de rayon 1 et soit $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, alors :

(a) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7-2i)$ et de rayon 3.

(b) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7+4i)$ et de rayon 3.

(c) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7-2i)$ et qui passe par le point $A(7+i)$.

(d) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7-4i)$ et qui est tangent à l'axe des abscisses.

EXERCICE 7

On donne trois points A, B et M. On considère les points N milieu de $[AM]$ et P milieu de $[BM]$.

Question 15 On a alors :

(a) N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

(b) N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

(c) P est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(d) P est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 8

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, on considère un tétraèdre $ABCD$.

Question 16 L'ensemble des points M tels que

$$\left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right\|.$$

(a) est un singleton. (b) est une droite. (c) est un plan. (d) est une sphère.

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé et on considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x+y+z=3$,

la droite $(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et la droite $(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$.

Lahcen Oukhdil

Question 17 On a alors :

(a) La droite $(\mathcal{D}_2)$ passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(1,1,-2)$.

(b) La droite $(\mathcal{D}_2)$ passe par les points de coordonnées $(1,1,-1)$ et $(2,2,3)$.

(c) Les deux droites sont non coplanaires, $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D}_2) \parallel (\mathcal{P})$.

(d) Les deux droites sont non coplanaires, $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D}_2) \perp (\mathcal{P})$.

EXERCICE 9

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ on considère deux événements A et B.

Question 18 On suppose que $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{5}$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$, alors :

(a) Si les deux événements sont incompatibles alors $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{10}$.

(b) Si les deux événements sont indépendants alors $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{8}$.

(c) Si A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé alors $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.

(d) Si B est réalisé alors A est aussi réalisé.

EXERCICE 10

Dans un concours la liste d'attente est constituée de n candidats $(n \geq 4)$ ordonnés suivant l'ordre de mérite. Deux amis se trouvent dans cette liste. On considère les deux événements :
A : "Les deux amis soient situés l'un après l'autre "
B : " les deux amis soient séparés par un troisième candidats "

Question 19 La probabilité $\mathrm{P}(A)$ est :

(a) $\frac{1}{n}$. (b) $\frac{2}{n}$. (c) $\frac{2}{n(n-1)}$. (d) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

Question 20 La probabilité $\mathrm{P}(B)$ est :

(a) $\frac{2}{n(n-1)}$. (b) $\frac{2}{n-1}$. (c) $\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$. (d) $\frac{2}{n}$.

Exercice 1

Question 1	On a $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ Donc $u_0 = a$ et $\lvert u_n \rvert \le 1 \quad \forall n \ge 1$ Donc $\lvert u_n \rvert \le \max(\lvert a \rvert, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Donc (u_n) est bornée	(b)
Question 2	On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ On a $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $x \to \sin(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ Alors $l = \sin(l)$ Donc $l = 0$	(b)
Question 3	On a $\gamma = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2} - \frac{1}{x^2}$ $\quad \boxed{\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}} - \frac{1}{x^2}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{36}\right)} - 1\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(1 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{36}\right) - 1\right)$ $\quad \boxed{\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{36}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$	(b)
Question 4	On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} = \gamma$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \gamma$ Donc	

	$$\left\|\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\gamma\right\|<\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left\|\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}-\gamma\right\|<\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon$$ $$\Rightarrow\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\gamma\right\|<n\varepsilon$$ $$\Rightarrow\left\|\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}-n\gamma\right\|<n\varepsilon$$ $$\Rightarrow\left\|\frac{1}{nu_n^2}-\frac{16}{n\pi^2}-\gamma\right\|<\varepsilon$$	d
	Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{nu_n^2}-\frac{16}{n\pi^2}-\gamma=0$ Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{nu_n^2}=\gamma$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}}{u_n}\right)^2=1$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}}{u_n}=1$ Ce qui montre $u_n\sim\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}$	
Exercice 2		
Question 5	On a $$I_0=\int_0^1(1-x)^0e^{-2x}dx=\int_0^1e^{-2x}dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}}$$ $$I_1=\int_0^1(1-x)e^{-2x}dx=\left[-\frac{(1-x)e^{-2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{-2x}}{2}dx=\frac{1}{2}+\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1$$ $$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{1}{4}$$ $$=\boxed{\frac{1}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}}$$	(b)

Question 6	• Soit $n \in IN$ On a $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$$ $$= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$$ $$= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx$$ Or $0 \le x \le 1$ alors $-x(1-x)^n e^{-2x} \le 0$ donc $\int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx \le 0$ Donc $I_{n+1} \le I_n$ Alors (I_n) est décroissante • Pour tout $n \in IN$ on a $$(1-x)^n e^{-2x} \ge 0 \text{ donc } \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \ge 0 \text{ donc } I_n \ge 0$$ Alors (I_n) est décroissante et minorée par 0 D'où (I_n) est convergente	(b) et (d)

Exercice 3

Question 7

- Soit $n \in IN$

  On a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

$$= \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$$

$$= \frac{-2}{(4n+3)(4n+5)} \prec 0$$

  Alors

$$S_{2(n+1)} \prec S_{2n} \qquad \forall n \in IN$$

  D'où la suite (S_{2n}) est décroissante

- De plus on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \underbrace{1 - \frac{1}{3}}_{\succ 0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}_{\succ 0} + \dots$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n \succ 0$

(b) Et (d)

Question 8

- Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times t^{2k} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k dt = \int_0^1 \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1-\left(-t^2\right)} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1} \times \left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} \times \left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1} \times \left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

Donc

$$\boxed{S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt}$$

$$\boxed{S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^{n} \times \int_0^1 \frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt}$$

(b) Et (d)

Question 9

On a

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

Or

$$0 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{1}{1+t^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le t^{2n+2}$$

$$\Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \le \int_0^1 t^{2n+2} dt \Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \le \frac{1}{2n+3}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

(b)

Exercice 4

Question 10

- On suppose que $r=\dfrac{p}{q}$ est une racine de p alors

$$P(r)=0\Rightarrow a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+....+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$$

$$\Rightarrow a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_1\,pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

$$\Rightarrow a_np^n=-q\left(a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0q^{n-1}\right)\quad \text{et}\quad a_0q^n=-p\left(a_np^{n-1}+...+a_1q^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow q \text{ divise } a_np^n \quad \text{et} \quad p \text{ divise } a_0q^n$$

Or $p\wedge q=1$ alors $p\wedge q^n=1$ et $p^n\wedge q=1$

Donc d'après Théorème de Gauss

$$q \text{ divise } a_n \quad \text{et} \quad p \text{ divise } a_0$$

(a) et (c)

sti on

Exercice 5

Question 12

- Soit $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\in E$, on a

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\in E$

Alors $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(E,\times)$

-
  - ☑ la loi $\times$ associative
  - ☑ $\times$ admet élément neutre
  - ☑ Tout les élément de E est symétrique
  - ☑ la loi $\times$ est commutative

Alors $(E,\times)$ est un group commutatif

(c) et (d)

Exercice 6

Question 13

On a

$$\sigma(z)=-3\bar{z}+4-2i=foh$$

Tel que $f(z)=-3z+4-2i=-3\left(z-1+\dfrac{1}{2}i\right)+1-\dfrac{1}{2}i$ et $g(z)=\bar{z}$

Alors f est une homothétie de centre $\Omega\left(1-\dfrac{1}{2}i\right)$ et de rapport -3

Et est une symétrie axiale (Ox)

D'où σ est la composition d'une symétrie axiale et d'une homothétie

(a)

Question 14

On a $\sigma(I)=J \Rightarrow z_J=-3\overline{z_I}+4-2i=7-2i$

Donc $J(7-2i)$

Soit $M(z)\in(C)$ alors $\sigma(M)=M'\in(C')$ i.e $z'=-3\overline{z}+4-2i$

Donc

$$JM=|z_J-z'|=|7-2i+3\overline{z}-4+2i|=|3+3\overline{z}|=3|1+\overline{z}|=3|\overline{1+z}|=3|1+z|=3$$

Car $|\overline{z}|=|z|$ et $|1+z|=|z-(-1)|=IM=1$

Donc (C') est le cercle de centre $J(7-2i)$ et de rayon 3

On a $B(-1+i)\in(C)$ alors $A=\sigma(B)\in(C')$

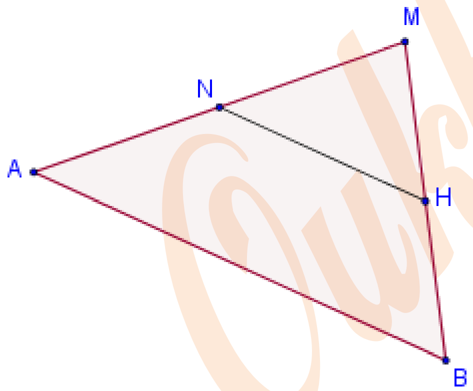
Et on a $z_A=-3\overline{z_B}+4-2i=7+i$

alors $A(7+i)\in(C')$

d'où (C') est le cercle de centre $J(7-2i)$ et qui passe par le point $A(7+i)$

(a) et (c)

Question 15



- On a N milieu de $[AM]$ alors $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Alors N est l'image de M homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

- On a

$$\begin{cases} N \text{ milieu de } [AM] \\ P \text{ milieu de } [BM] \end{cases} \Rightarrow (NP)//(AB) \quad et \quad NP=\frac{1}{2}AB$$

Donc $\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Alors P est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(a) et (c)

Question 16

On pose $G=bar\left(A(3),B(2)\right)$ et $G'=bar\left(C(2),D(3)\right)$

Alors $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=5\overrightarrow{MG'}$

Donc

$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\| \Rightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MG'}\right\| \Rightarrow 5MG=5MG' \Rightarrow \boxed{MG=MG'}$ Donc l'ensemble des point M est un plan

©

Question 17	• On a $(D_2):\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$
	On pose $x=t$ donc $(D_2):\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$
	Alors la droite (D_2) passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(1,1,-2)$
	• $\vec{n}(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan (P)
	$\vec{u_1}(-2,1,1)$ est un vecteur directeur de (D_1)
	$\vec{u_1}(1,1,-2)$ est un vecteur directeur de (D_2)
	Or $\vec{u_1}.\vec{n}=0$ et $\vec{u_2}.\vec{n}=0$ alors $(D_2)//(P)$ et $(D_1)//(P)$
	De plus on a $M(1,1,2)\in(D_1)$ et $M(1,1,2)\notin(P)$
	$N(0,0,1)\in(D_2)$ et $N(0,0,1)\notin(P)$
	Alors les deux droites sont non coplanaire , $(D_2)//(P)$ et $(D_1)//(P)$
		(a) et (c)

Question 18		
Question 19	$P(A)=\dfrac{2}{n}$	(c)
Question 20	$P(B)=\dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}$	©