موضوع في مادة الرياضيات:(10 نقط)

EXERCICE 1

On considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \{7n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad E_2 = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$E_3 = \{28n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad E_4 = \{30n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Question 1 Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) $E_1 \subset E_3$. (b) $E_3 \subseteq E_2$. (c) $E_3 \cap E_4 = E_1$. (d) $E_1 \cap E_2 = E_3$.

Question 2 Soit E un ensemble non vide et $a \in E$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X, \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X. \end{cases} \end{array} \right.$$

Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) Si E est fini alors f est injective et non surjective.

(b) f est surjective non injective.

(c) f est bijective.

(d) f n'est injective ni surjective.

Question 3 On suppose que E est fini de cardinal $n \geq 2$; et on note :
$\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair.
$\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.
On a alors,

(a) $\text{card}(\mathcal{P}_0(E)) = 2n$.

(b) $\text{card}(\mathcal{P}_0(E)) = 2\text{card}(\mathcal{P}_1(E))$.

(c) $\text{card}(\mathcal{P}_1(E)) = 2^{n-1}$. ✓

(d) $\text{card}(\mathcal{P}_0(E)) = \text{card}(\mathcal{P}_1(E))$. ✓

EXERCICE 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on note A le point d'affixe $z_A = 1$ et on considère la transformation φ qui à chaque point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1+i)z - i .$$

Question 4 Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) Le triangle AMM' est isocèle rectangle en M.

(b) Le triangle AMM' est isocèle rectangle en M'.

(c) Le triangle AMM' est équilatéral.

(d) Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$.

Question 5 Soient B le symétrique du point A par rapport à l'origine du repère O, M le point d'affixe $z = \frac{-1+i}{2}$ et M' son image par φ ; alors :

(a) Les points A, B, M et M' appartiennent au cercle de diamètre $[AM']$.

(b) Les points A, B, M et M' n'appartiennent à aucun cercle.

(c) Les points A, B, M et M' appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$.

(d) Les points A, B, M et M' appartiennent au cercle d'équation cartésienne $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$.

Exercice 3

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A, B et C, de coordonnées :

$$A(1,0,-1) \quad , \quad B(0,2,-2) \quad , \quad C(2,2,2)$$

Question 6 Soit $\vec{n}_1(4,1,-2)$. Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) Le vecteur $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

(b) Le vecteur $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de la droite (AC).

(c) Le vecteur $\vec{n}_1$ est normal au plan (ABC). ✓

(d) Le point C appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Question 7 Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

(a) $4x+y-2z=6$. ✓ (b) $4x-y+2z=6$. (c) $2x+4y-z=1$. (d) $x+2y-4z=1$.

Question 8 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x-2y+z=0$. Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

✓ (a) Les deux plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont perpendiculaires.

(b) Les deux plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.

(c) Le vecteur $\vec{n}_1$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

✓ (d) Les deux points A et C appartiennent à $\mathcal{P}$.

Exercice 4

Soit la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2 : a_n \in]0,\pi[\quad \text{et} \quad \sin(a_n) = \frac{a_n}{n}.$$

Question 9 Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente de limite 0.

(b) La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

(c) La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

(d) Pour tout $n \geq 2 : a_n \leq \frac{\pi}{2}$.

Question 10 Il existe deux réels a et b et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 2}$ convergeant vers 0, tels que pour tout $n \geq 2$, on a $a_n = a + \frac{b}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$, alors :

(a) $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. (b) $a = \pi$ et $b = -\pi$. (c) $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = -\pi$. (d) $a = \pi$ et $b = -\frac{\pi}{2}$.

Question 11 On note A l'ensemble :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = x^2 + x + 1\right\} ;$$

Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) $A \subset [0,1]$. (b) $A \subset]-1,0[$. (c) A n'est pas borné. (d) A contient au moins trois éléments

EXERCICE 5

Soit l'équation différentielle

$$\left(1+x^2\right) y'(x) + 2xy(x) = \frac{1}{x}, \qquad (E)$$

que l'on étudie sur $I =]0, +\infty[$.

Question 12 Soient $y_0 \in \mathbb{R}$ et f la solution de (E) sur I telle que $f(1) = y_0$. La tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe représentative de f au point $A(1, y_0)$ admet pour équation :

(a) $y = y_0 + (1 - y_0)(x-1)$.

✓ (b) $y = \frac{1}{2}(x-1) - y_0(x-2)$.

(c) $y = (1-y_0)x + 2y_0 - 1$.

(d) $y = \left(\frac{1}{2} + y_0\right)x + 2y_0 - 1$.

Question 13 Les tangentes $\mathcal{T}_A$, lorsque y_0 varie, sont :

(a) Concourantes au point $B(3,2)$.

(b) Parallèles.

(c) Concourantes au point $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

(d) Concourantes au point $B(1,1)$.

EXERCICE 6

Soit f et g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Question 14 Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) f est croissante.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

(c) f est bornée.

(d) f est paire.

Question 15 On note g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$; alors :

(a) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-x^2} f(x)$.

(b) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2f'(x)f(x)$.

(c) $g(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

(d) $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Question 16 En considérant la fonction $g + f^2$, on peut alors conclure que :

(a) f admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(c) f admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(d) f admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$. La suite $(S_n)_n$ est croissante et majorée et donc convergente. On se propose de calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$, notée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Question 17 Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

(a) $\dfrac{4}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}$.

(b) $\dfrac{4}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi - x}{2}\right)}$.

(c) $\dfrac{2}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}$.

(d) $\dfrac{2}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}$.

Question 18 On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^n$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{2n-1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{4n-3}$.

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{3n-2}$.

✓ **Question 19** Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, par $g(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$. Parmis les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$.

(b) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

(c) g est bornée sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. ✓

(d) g n'est pas prolongeable par continuité à droite de 0.

✓ **Question 20** En majorant $\left|\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(\frac{1}{\sin^2(x_k)} - \frac{1}{(x_k)^2}\right)\right|$ avec $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, on démontre que :

(a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(c) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

(d) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.

Concours Taalim
Math Janvier 2018

Ex1 :

$E_1 = \{7n / n \in \mathbb{N}\}$, $E_2 = \{4n / n \in \mathbb{N}\}$

$E_3 = \{28n / n \in \mathbb{N}\}$, $E_4 = \{30n / n \in \mathbb{N}\}$

Q1/ [a est un multiple de b $\Leftrightarrow$ $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$]

[$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{pgcd}(a,b)\mathbb{Z}$]

[$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a,b)\mathbb{Z}$]

on a : 28 est un multiple de 4

donc $28\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$

d'où : rep : **b**

Q2/ on a :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \longrightarrow \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases} \end{cases}$$

Soient X et Y des éléments de $\mathcal{P}(E)$ tq :

$f(X) = f(Y) \Longrightarrow$ (en particulier)

$$X \cup \{a\} = Y \setminus \{a\}$$

on a pas forcément $X = Y$ (au cas où $a \in Y$ et $a \notin X$)

donc f n'est pas injective.

Etude de la Surjectivité de f :

Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$

Existe-t-il un $Z \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $f(Z) = Y$

1 cas : Si $a \in Y$, on prend $Z = Y - \{a\}$

donc $f(Z) = Y$

2 cas : Si $a \notin Y$, on prend $Z = Y \cup \{a\}$

donc : $f(Z) = Y$

f est surjective et non Injective

rép : b

Q3) E fini, $\cancel{a}$. $\text{Card}\,E \geq 2$

$P_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair.

$P_1(E)$ l'ensemble des parties de E de Cardinal impair.

on a alors :

c/ $\text{Card}(P_1(E)) = 2^{n-1}$

d/ $\text{Card}(P_0(E)) = \text{Card}(P_1(E))$

Exemple :

Si $E = \{1,2,3,4,5\}$ alors $P(E) = 2^{\text{Card}E} = 2^5 = 32$

- l'ensemble vide : $\emptyset$
- 5 singletons $\{1\}, \{2\}, \ldots$
- 10 paires : $\{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{2,3\}, \ldots,$
- 10 triplets : $\{1,2,3\}, \ldots,$
- 5 ensembles à 4 éléments : $\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \ldots$
- et E tout entier : $\{1,2,3,4,5\}$.

(3)

Ex 2 : $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$

$$z \longrightarrow z' = (1+i)z - i$$

$z_A = 1$, $z(M)$, $z(M') = (1+i)z_M - i$

Q4/

$$\Rightarrow z' = z + iz - i$$

$$\Leftrightarrow z' - z = i(z-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-z}{1-z} = -i \notin \mathbb{R}$$

Or, $\arg\left(\dfrac{z'-z}{z_A - z}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$

d'où : le triangle AMM' est rectangle en M

1

on pose : $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$z' = (1+i)z - i = (1+i)(x+iy) - i$

$= x + iy + ix - y - i$

$$z' = \underbrace{(x-y)}_{Re} + i\,\underbrace{(x+y-1)}_{Im}$$

$$|z' - z| = |(\cancel{x}-y) + i(x+\cancel{y}-1) - (\cancel{x+iy})|$$

$$= |-y + i(x-1)| = \sqrt{y^2 + (x-1)^2}$$

$$|z_A - z| = |1 - (x+iy)| = |(1-x) + iy|$$

$$= \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$ z

d'où : $|z' - z| = |z_A - z|$

$$M'M = MA \quad (2)$$

le triangle AMM' est isocèle en M (2)

de (1) et (2) :

le triangle AMM' est isocèle rectangle en M.

rep : a

Q5/

$$\varphi : z \longrightarrow z' = (1+i)z - i$$

$Z_A = 1$

$B = Sym_O(A) \Leftrightarrow Z_B = -1$

$Z_M = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$Z_{M'} = Z_{\varphi(M)} = (1+i)(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) - i$

$Z_{M'} = -1 - i$

A, B, M, M' sont cocycliques ssi

$bir(a,b,m,m') = \frac{m'-a}{b-a} \times \frac{b-m}{m'-m} \in \mathbb{R}$

$$\frac{-1-i-1}{-1-1} \times \frac{-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{-1-i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{-2-i}{-2} \times \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}i\right) \times \frac{1+i}{1+3i}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \times \frac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \times \frac{4-2i}{10}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)$$

$$= \frac{2\times 2}{2\times 5} - \cancel{\frac{1}{5}i} + \cancel{\frac{1}{5}i} + \frac{1}{10}$$

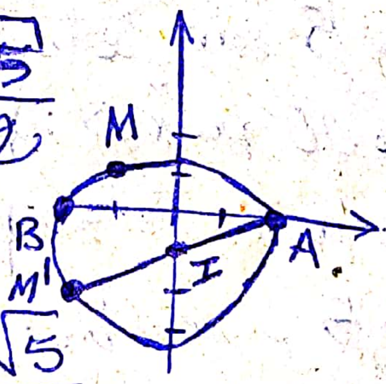
$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

d'où : Les points A, B, M et M' appartiennent au Cercle de diamètre [AM']

$$z_I = \frac{a+m'}{2} = \frac{1-1-i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

$$IA = IM' = \left|-1-i+\frac{1}{2}i\right| = \left|-1-\frac{1}{2}i\right|.$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



~~$IB = \left|b + \frac{i}{2}\right| = |-1-i|$~~

$$IB = |b - z_I| = \left|-1+\frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

rép : a

Exercice 3 :

$A(1,0,-1)$, $B(0,2,-2)$, $C(2,2,2)$

Question 6 :

$\vec{n_1}(4,1,-2)$

le Système d'équations paramétriques des droites (AB) et (AC).

$(AB) : \begin{cases} x = 1-k \\ y = 2k \\ z = -1-k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$(AC) : \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -1+3\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

Par ailleurs, on a $\vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = -4+2+2$
$= 0$

$\Rightarrow \vec{n_1} \perp \vec{AB}$

De même, $\vec{n_1} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 4+2-6$
$= 0$

$\Rightarrow \vec{n_1} \perp \vec{AC}$

Donc le vecteur $\vec{n_1} \perp (ABC)$ Rép : c

Q 7/

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

donc : $4x+y-2z+d=0$

or, $C \in (ABC)$ donc :

$4\times 2+2-2\times 2+d=0$

$8+2-4+d=0$

$\boxed{d=-6}$

$(ABC): 4x+y-2z-6=0$

$(ABC): 4x+y-2z=6$

rép : b.

Q8/ $(P) : x - 2y + z = 0$

$(ABC) : 4x + y - 2z = 6$

$\vec{n_1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal du plan (ABC)

$\vec{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal du plan (P)

Or, $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 \times 4 - 2 \times 1 + (1) \times (-2) = 0$

Donc (P) et (ABC) sont perpendiculaires.

rép : a

Exercice 4 : $(a_n)_{n\geq 2}$

$\forall n\geq 2 : a_n \in]0,\pi[$ et $\sin(a_n) = \frac{a_n}{n}$

Questions :

$\frac{a_n}{\sin a_n} = n$ $\quad \forall n \geq 2,\ 0 < a_n < \pi$

on considère la fonction :

$f(x) = \frac{x}{\sin x}$, $x \in]0,\pi[$

on a : $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$

x	0		π
$f'(x)$		$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$

Par ailleurs, f est strictement croissante sur $]0,\pi[$ donc réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $]1,+\infty[$

on a $n \geq 2$ donc $n \in]1,+\infty[$ donc n admet un unique antécédent $a_n \in]0,\pi[$ telle que $f(a_n) = n$

on a: $n = f(a_n)$ et $n+1 = f(a_{n+1})$

$\Rightarrow f(a_n) + 1 = f(a_{n+1})$

$\Rightarrow f(a_{n+1}) - f(a_n) = 1 > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$

donc : La Suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est Croissante.

rep : b

Q10/

on a (a_n) est une suite croissante et BC)

$0 < a_n < \pi$, majorée donc elle converge

vers l fini donc l vérifie $\sin(l) = \frac{l}{n}$

$\Rightarrow \sin(l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow l = \pi$

* Posons $b_n = \pi - a_n$ $(\Leftrightarrow a_n = \pi - b_n)$.

et $b_n \longrightarrow 0$

Soit $\frac{\pi - b_n}{\sin(b_n)} = n$

$\Leftrightarrow \sin(b_n) \simeq \frac{\pi - b_n}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{b_n}{n}$

$b_n \simeq \frac{\pi}{n} - \frac{b_n}{n}$

$\Leftrightarrow \pi - a_n \simeq \frac{\pi}{n} - \varepsilon_n \mid \varepsilon_n = \frac{b_n}{n} \longrightarrow 0$

$\Leftrightarrow \pi - \frac{\pi}{n} + \varepsilon_n = \varepsilon_n$

Bilan: $a = \pi$ et $b = -\pi$

Question 11 :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \sin(x) = x^2 + x + 1\}$$

Soit $x \in A$, alors x vérifie :

$$\sin(x) = x^2 + x + 1$$

Or, on sait que pour tout x réel

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$\Rightarrow -1 \leq x^2 + x + 1$ et $x^2 + x + 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 2 \geq 0$ et $x^2 + x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1;0]$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, +\infty[\cap [-1;0] = [-1;0]$

Bilan : $A \subset]-1,0[$, 0 et $-1 \notin A$

Exercice 5 :

$$(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = \frac{1}{x}$$

que l'on étudie sur $I =]0,+\infty[$

Question 12 :

l'équation Cartésienne de la Tangente de f au point $A(1, y_0)$ est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= f'(1)(x-1) + y_0$$

or, d'après l'équation différentielle, on a :

$$(1+1^2) f'(1) + 2\times 1\times y_0 = \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2f'(1) + 2y_0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{2}(1-y_0)$$

Donc $y = \frac{1}{2}(1-y_0)(x-1) + y_0$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x-1) - y_0(x-2)$$

rep : b

Question 13 :

on a : $y = \frac{1}{2}(x-1) - y_0(x-2)$

$\Leftrightarrow \frac{y}{y_0} = \frac{1}{2y_0}(x-1) - (x-2)$

On fait tendre y_0 vers ∞ donc :

$-(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Puis on remplace dans l'équation, entraine

$y = \frac{1}{2}$

Point $B(2 ; \frac{1}{2})$

rep : C

Exercice 6 :

Soit, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

Question 14 :

on a $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,x]$ donc integrable et son primitive est positive aussi donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

rép : b

Scanné avec CamScanner

Question 15 : rép : b

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

la fonction $(t,x) \to \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,dt$ admet une dérivée partielle par rapport à x, Continue. on en déduit (théorème de dérivabilité sous le signe intégral) que g est dérivable et que

$$\forall x \geq 0,\ g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,dt = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2}\,dt$$

ce qui, après le changement de Variable $u = tx$ donne

$$g'(x) = -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,du = -2 f'(x) f(x) \text{ avec : } f : x \to \int_0^x e^{-u^2}\,du$$

En intégrant, on en déduit que

$\forall x \geq 0,\ g(x) - g(0) = -\left(f^2(x) - f^2(0)\right)$ donc $g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$

Les inégalités $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ entrainent que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, et la fonction f étant positive,

on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, ce qui s'écrit :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Q 16/

rép : C

Question 17 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(S_n) croissante et majorée $\Rightarrow (S_n)$ converge

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

on a : $$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{4}{\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{4}{\sin^2\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)} = \frac{4}{\sin^2(x)}$$

rep : b

Question 18 :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ (n \geq 1)$

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{2n-1}$$

pour $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2^{2-1} = \boxed{2}$$

pour $n = 2$:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right)} = \ = 2^{2\times 2-1} = 8$$

rép : b

Scanné avec CamScanner

Question 19 :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \; g(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

rep : C :

g est bornée sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Lemme de Lebesgue pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0,$$

les deux dernières limites étant obtenues par passage aux parties réelles et imaginaires.

Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

La fonction f définie en 4) est continue sur $[0,\pi]$ et d'après le lemme de Lebesgue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt = 0$.
Le 5)b) montre alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On a $S - S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}S$ et donc

$S' = \dfrac{1}{2}S = \dfrac{\pi^2}{12}$. On a aussi $S + S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2} = 2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ et donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{2}(S+S') = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$. ∎

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Question 20 :

$$\left|\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(\frac{1}{\sin^2(x_k)}-\frac{1}{(x_k)^2}\right)\right| \text{ avec } x_k=\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

rep : b

Fin