المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

**مباراة توظيف الأساتذة أطر الأكاديميات**
**بالنسبة للتعليم الثانوي بسلكيه الإعدادي والتأهيلي – دورة نونبر 2019**
**الموضوع**

**خاص بكتابة المباراة**

**رقم الامتحان** ..........................

**الإسم الشخصي والعائلي :** ........................................................................................

**تاريخ ومكان الازدياد :** ........................................................................................

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **التخصص:** الرياضيات | **الاختبار :** اختبار في مادة التخصص وديداكتيك مادة التخصص | **مدة الإنجاز:** | **ثلاث ساعات** | **المعامل** | **3** |

---

**التخصص :** الرياضيات
**الاختبار :** اختبار في مادة التخصص وديداكتيك مادة التخصص

**ورقة الإجابة**

ا ل ن [redacted] م
(. [redacted] ة
إسم ه التميطهج وعدو ي ع ه :

**خاص بكتابة المباراة**

**الصفحة : 1 على 19**

# <u>تعليمات للمترشح</u>

الإختبار يتكون من موضوعين:

- الموضوع الأول يتعلق بمادة الرياضيات يتكون من أسئلة متعددة الإختيارات (20 نقطة)
- الموضوع الثاني يتعلق بمادة ديداكتيك الرياضيات يتكون من ثلاثة أجزاء (20 نقطة).

## ملحوظة:

- جميع الأجوبة المتعلقة بأسئلة الإختبار (المكون من الموضوعين) تحرر على **ورقة الإختبار**.

- بالنسبة للموضوع الأول المتعلق بأسئلة متعددة الاختيارات، كل سؤال يقبل جوابا صحيحا واحدا و تتم الإجابة على **ورقة الإختبار** بالطريقة التالية:

Question :

$7+5=$

- ☐ 13
- ☐ 11
- ☒ 12
- ☐ 14

# لا يكتب أي شيء
# في هذا الإطار



## موضوع [redacted] نقطة)

**QUESTION 1 :**

Pour tout entier naturel $n$ , soit $P(n$ une proposition portant sur $n$ , et telle que si $P(n$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi .

On suppose qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que $P(n_0)$ soit fausse.

Cocher la conclusion juste qu'on peut en tirer :

- ☐ $P(n_0+1)$ est fausse
- ☐ $P(n$ est fausse pour tout entier $n \leq n_0$
- ☐ $P(n$ est fausse pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ $P(n$ est fausse pour tout entier $n$

---

**QUESTION 2 :**

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ .

Cocher la propriété qui implique que $A$ est un intervalle :

- ☐ $\forall (a,b) \in A^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Rightarrow \quad (x \in A)$
- ☐ $\exists (a,b) \in A^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Rightarrow \quad (x \in A)$
- ☐ $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Rightarrow \quad (x \in A)$
- ☐ $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Leftrightarrow \quad (x \in A)$

---

**QUESTION 3 :**

Soient $E$ une partie de $\mathbb{C}$ et $f : E \to E; x \mapsto x^2$ . Parmi les assertions suivantes, cocher celle qui est vraie :

- ☐ Si $E = \mathbb{R}$ alors $f$ est injective et non surjective.
- ☐ Si $E = \mathbb{R}^*$ alors $f$ est non injective et surjective.
- ☐ Si $E = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ alors $f$ est non injective et non surjective.
- ☐ Si $E = \mathbb{C}$ alors $f$ est non injective et surjective.

---

# لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

[redacted]



**QUESTION 4 :**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 5$. En considérant la fonction numérique, $f : x \mapsto (3+x)^n$ , cocher l'assertion qui est vraie :

- ☐ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n-1} n$
- ☐ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n} n$
- ☐ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n+1} n$
- ☐ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n+1}$

---

**QUESTION 5 :**

Soit $a \in \mathbb{R}$ . On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = a$ et pour $n \geq 0$ , $u_{n+1} = e^{-u_n} - 2$ . Cocher, parmi les assertions suivantes celle qui est juste :

- ☐ La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pour aucune valeur de $a$ tel que $a \in \left]-\infty, -\ln(2)\right] \cup [0, +\infty[$ .
- ☐ Pour $a = 0$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante .
- ☐ Pour $a = 10$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $-\infty$
- ☐ Pour $a = -0,5$ , la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente .

---

**QUESTION 6 :**

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad et \quad u_1 = 1 \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0 \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

Cocher l'affirmation exacte :

- ☐ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique
- ☐ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 9^n + 1$

# لا يكتب أي شيء
# في هذا الإطار

[redacted]



- ☐ $\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{64}\left(9^n - 8n - 9\right)$

**QUESTION 7 :**

Cocher l'affirmation exacte :

- ☐ Les deux séries $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sont de même nature.
- ☐ La série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge si et seulement si $|x| < 1$
- ☐ La série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est convergente
- ☐ La série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ est convergente

---

**QUESTION 8 :**

Cocher l'assertion vraie :

- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement deux solutions réelles.
- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement trois solutions réelles.
- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement quatre solutions réelles.
- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement cinq solutions réelles.

---

**QUESTION 9 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$

Cocher l'assertion juste :

- ☐ Le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R} - \{1\}$
- ☐ $f$ se prolonge par continuité en $1$ , en posant $f(1) = e$
- ☐ $f$ se prolonge par continuité en $1$ , et la fonction prolongée est dérivable en $1$
- ☐ La fonction $f$ est dérivable en tout point de son domaine de définition et sa fonction dérivée est : $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}|x|^{\frac{1}{x-1}-1}$

---

# لا يكتب أي شيء
# في هذا الإطار

[redacted]



**QUESTION 10:**

Cocher l'assertion juste :

- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers de la forme : $6n+3 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$ .
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers de la forme : $4n+3 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$ .
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers de la forme : $n(n+2)+1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$ .
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers de la forme : $12^n+3n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$ .

---

**QUESTION 11 :**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ .

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $f$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in ]a,b[ \qquad f'(x) > 0$
- ☐ $f$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f$ est strictement croissante sur $]a,b[$
- ☐ $\exists c \in ]a,b[ \qquad f'(c) = 0$
- ☐ $\exists! c \in ]a,b[ \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

---

**QUESTION 12 :**

Cocher le développement limité (en $0$ ) exact :

- ☐ $\tan x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{2}{15}x^6 + o\left(x^6\right)$
- ☐ $\dfrac{1}{1-2x\cos\alpha + x^2} = 1 + \left(2\cos\alpha\right)x + \left(1 + 2cos2\alpha\right)x^2 + o\left(x^2\right)$
- ☐ $\ln\left(\cos x\right) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$
- ☐ $\sqrt{\dfrac{x}{tan\, x}} = 1 - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{40} + o\left(x^4\right)$

---

# لا يكتب أي شيء
# في هذا الإطار



**QUESTION 13 :**

Cocher l'encadrement exact :

- ☐ $\forall x \in ]-1,0[ \qquad x < ln(1+x) < \dfrac{1}{1+x}$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} < e^{-1} < \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} < e^{-1} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \leq x^n$

---

**QUESTION 14 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = +\infty$
- ☐ $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
- ☐ $\exists x > 0$ tel que : $f(x) = 0$

---

**QUESTION 15 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit $E$ l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tel que : $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$ .

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $E = \{0,1\}$ .
- ☐ $E$ est le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon 1.

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

[redacted]



☐ $E=\{0,1,-1\}$.

☐ $E=\{1,0,i,-i\}$.

---

## QUESTION 16 :

On considère l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}\,dx$

En effectuant une intégration par parties, cocher la réponse juste :

☐ $I=\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3+\pi\sqrt{3}}$

☐ $I=\dfrac{3\sqrt{3}}{3+\pi\sqrt{3}}$

☐ $I=\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$

☐ $I=\dfrac{3\sqrt{3}+\pi}{3+\pi\sqrt{3}}$

---

## QUESTION 17 :

Pour tout entier naturel $n$ on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs multiple de $n$ : $n\mathbb{Z}=\{nk \mid k\in\mathbb{Z}\}$ et pour $a,b\in\mathbb{N}$ , $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\{au+bv \,/\, (u,v)\in\mathbb{Z}^2\}$

Cocher l'assertion juste :

☐ $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=\varnothing$ (l'ensemble vide).

☐ $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$

☐ $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}=5\mathbb{Z}$

☐ $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$

---

## QUESTION 18 :

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de plans d'équations $n^2x+(2n-1)y+nz=3$

On note $E$ l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire $E=\{M(x,y,z) \,/\, \forall n\in\mathbb{N},\ M\in P_n\}$

Cocher l'assertion juste :

☐ $E=\varnothing$

# لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

[redacted]



- ☐ $E$ est le plan d'équation : $x+y+z=3$
- ☐ $E$ est la droite d'équation : $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y=-3 \end{cases}$
- ☐ $E$ est le point de coordonnées $(0,-3,6)$

---

**QUESTION 19 :**

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=+\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\ln 2$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ n'existe pas

---

**QUESTION 20 :**

On lance 2 dés cubiques (à six faces numérotées de 1 à 6) parfaitement équilibrés, de manières indépendantes. Tous les résultats sont équiprobables. On note $S$ la somme des deux faces obtenues. Soient $p$ la probabilité d'obtenir deux numéros identiques et $q$ celle d'obtenir une somme $S$ paire.

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $p=\frac{C_6^1}{C_6^2}$ et $q=\frac{C_6^3}{C_6^2}$
- ☐ $p=\frac{1}{36}$ et $q=\frac{1}{2}$
- ☐ $p=\frac{1}{6}$ et $q=\frac{1}{2}$
- ☐ $p=\frac{1}{6}$ et $q=\frac{1}{4}$

---

## QUESTION 1 :

Pour tout entier naturel $n$ , soit $P(n)$ une proposition portant sur $n$ , et telle que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi .

On suppose qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que $P(n_0)$ soit fausse.

Cocher la conclusion juste qu'on peut en tirer :

- ☐ ~~$P(n_0+1)$ est fausse~~
- ☒ $P(n)$ est fausse pour tout entier $n \leq n_0$
- ☐ $P(n)$ est fausse pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ $P(n)$ est fausse pour tout entier $n$

---

si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $P(n_0)$ fausse

$(P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie$) \Leftrightarrow (P(n+1)$ fausse $\Rightarrow P(n)$ fausse$)$

$P(n_0)$ fausse $\cancel{\Rightarrow}$ $P(n_0+1)$ fausse

$(P(n_0)$ fausse $\Rightarrow P(n_0-1)$ fausse$)$

$P(n_0)$ fausse $\Rightarrow P(n_0-1)$ fausse $\Rightarrow P(n_0-2)$ fausse $\Rightarrow P(n_0-3)$ fausse

**QUESTION 2 :**

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Cocher la propriété qui implique que $A$ est un intervalle :

- [x] $\forall (a,b) \in A^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Rightarrow \quad (x \in A)$
- [ ] $\exists (a,b) \in A^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Rightarrow \quad (x \in A)$
- [ ] $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Rightarrow \quad (x \in A)$
- [ ] $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a < x < b) \Leftrightarrow \quad (x \in A)$

**QUESTION 3 :**

Soient $E$ une partie de $\mathbb{C}$ et $f : E \to E; x \mapsto x^2$ . Parmi les assertions suivantes, cocher celle qui est vraie :

- ☐ ~~Si $E = \mathbb{R}$ alors $f$ est injective et non surjective.~~
- ☐ ~~Si $E = \mathbb{R}^*$ alors $f$ est non injective et surjective.~~
- ☐ Si ~~$E = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ alors $f$ est non injective et non surjective.~~
- ☒ Si $E = \mathbb{C}$ alors $f$ est non injective et surjective.

---

$f(x) = x^2$

$f(1) = f(-1) = 1$

$1 \neq -1$

$f(y) = f(y')$

$\Rightarrow y = y'$

---

$E = \mathbb{R}^*$ $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$x \to x^2$

$-2 \in \mathbb{R}^*$, mais $-2$ n'a pas un antécédent

$f$ non surjective

$E = \mathbb{R}^+$ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \to x^2$

Si $y$ et $y'$ sont dans $\mathbb{R}^+$ tel que $f(y) = f(y')$

alors $y^2 = y'^2$

On a $(y, y') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Donc $y = y'$

D'où $f$ est injective

Scanné avec CamScanner

**QUESTION 4 :**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 5$. En considérant la fonction numérique, $f : x \mapsto (3+x)^n$ , cocher l'assertion qui est vraie :

- [x] $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n-1} n$
- [ ] $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n} n$
- [ ] $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n+1} n$
- [ ] $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k} = 4^{n+1}$

---

$$f(x) = (3+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times 3^{n-k}$$

$$f'(x) = ((3+x)^n)' = n(3+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1} \times 3^{n-k}$$

si $x = 1$, alors $n(3+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k \times 1^{k-1} \times 3^{n-k}$

$$n 4^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k 3^{n-k}$$

## QUESTION 5 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ . On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = a$ et pour $n \geq 0$ , $u_{n+1} = e^{-u_n} - 2$ . Cocher, parmi les assertions suivantes celle qui est juste :

- ☒ La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pour aucune valeur de $a$ tel que $a \in \left]-\infty, -\ln(2)\right] \cup \left[0, +\infty\right[$ .
- ☐ Pour $a = 0$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante .
- ☐ Pour $a = 10$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $-\infty$
- ☐ Pour $a = -0,5$ , la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente .

---

supposons que $(U_n)_n$ CV

$U_{n+1} = f(U_n)$

$(U_n)_n$ converge vers $l$ tel que $l$ est la solution de $f(l) = l$

$e^{-x} - 2 = x \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} - x - 2 = 0}$

$g(x) = e^{-x} - x - 2$

$g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$

$g$ est décroissante

| $x$ | $-\infty$ | $-\ln 2$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | | | |
| $g(x)$ | | $\ln 2$ | $0$ | $-1$ | |

$g(-\ln 2) = e^{-(-\ln 2)} - (-\ln 2) - 2 = \cancel{e^{\ln 2}} + \ln 2 - \cancel{2} = \ln 2$

$g(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1$

Alors la suite $(U_n)$ ne converge vers aucune valeurs de $]-\infty, -\ln 2] \cup [0, +\infty[$

**QUESTION 6 :**

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad et \quad u_1 = 1 \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0 \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

Cocher l'affirmation exacte :

- ☐ ~~$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique~~
- ☐ ~~$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique~~
- ☐ ~~$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 9^n + 1$~~
- ☒ $\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{64}(9^n - 8n - 9)$

$V_{n+1} - V_n = (U_{n+2} - U_{n+1}) - (U_{n+1} - U_n) = \underbrace{U_{n+2}}_{10U_{n+1} - 9U_n} - \underbrace{U_{n+1} - U_{n+1}}_{} + U_n = 10U_{n+1} - 9U_n - 2U_{n+1} + U_n$

$= 8U_{n+1} - 8U_n = 8(U_{n+1} - U_n)$

$V_{n+1} - V_n = \underline{8V_n}$

$V_{n+1} = 8V_n + V_n$

$V_{n+1} = 9V_n$ $(V_n)$ géométrique de raison $9$

$V_n = 9^n \times V_0 = 9^n \times (U_1 - U_0) = 9^n(1 - 0) = 9^n$

## QUESTION 7 :

Cocher l'affirmation exacte :

- ☐ ~~Les deux séries~~ $\cancel{\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}$ ~~et~~ $\cancel{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$ ~~sont de même nature.~~
- ☐ ~~La série réelle~~ $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ ~~converge si et seulement si~~ $\cancel{|x| < 1}$
- ☐ La série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est convergente
- ☐ ~~La série réelle~~ $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}}$ ~~est convergente~~

---

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$$

$n \geq 1$ $\qquad \frac{1}{n\ln n} > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} = \frac{1}{1\times\ln 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$$

$$= \frac{1}{0^+} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$$

$$= +\infty + ///$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \geq 0$$

cv dans M $\to +\infty$

div

div, et majorée par K

$$0 < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} < K$$

$+\infty$

$\downarrow$

$+\infty$

$+\infty$

$\to +\infty$

**QUESTION 8 :**

Cocher l'assertion vraie :

- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement deux solutions réelles.
- ☒ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement trois solutions réelles.
- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement quatre solutions réelles.
- ☐ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a exactement cinq solutions réelles.

---

Posons $f(x) = x^5 - 5x + 1$ , $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1)$

$f'(x) = 0 \iff x^4 - 1 = 0$

$\iff (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$

$\iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{-\infty} x^5 - 5x + 1 = \lim\limits_{-\infty} x^5 = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$f(-1) = (-1)^5 - 5 \times (-1) + 1$
$= 5$

$f(1) = 1^5 - 5 \times 1 + 1 = -3$

## QUESTION 9 :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=|x|^{\frac{1}{x-1}}$

Cocher l'assertion juste :

- ☐ ~~Le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}-\{1\}$~~
- ☒ $f$ se prolonge par continuité en 1 , en posant $f(1)=e$
- ☐ $f$ se prolonge par continuité en 1 , et la fonction prolongée est dérivable en 1
- ☐ La fonction $f$ est dérivable en tout point de son domaine de définition et sa fonction dérivée est : $f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}|x|^{\frac{1}{x-1}-1}$

---

$f(x)=|x|^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{\ln|x|}{x-1}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |x|>0 \text{ et } x-1\neq 0\}$
$=\{ \text{"} / x\neq 0 \text{ et } x\neq 1\}=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{\ln|x|}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}}=e^1=e$ , $f(1)=e$

## QUESTION 10:

Cocher l'assertion juste :

- ☐ ~~Il existe une infinité de nombres premiers de la forme :~~ $\cancel{6n+3}$ , $n \in \mathbb{N}$ .
- ☒ Il existe une infinité de nombres premiers de la forme : $4n+3$ , $n \in \mathbb{N}$ .
- ☐ ~~Il existe une infinité de nombres premiers de la forme :~~ $\cancel{n(n+2)+1}$ , $n \in \mathbb{N}$ .
- ☐ ~~Il existe une infinité de nombres premiers de la forme :~~ $\cancel{12^n+3n}$ , $n \in \mathbb{N}$ .

---

$6n+3$ multiple de 3,

$n=0$

$3$

$4n+3 = ?$

$n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

$\downarrow$ 1

$12^n + 3n$ , $n=0$

$n$

$n \neq 0$

$1$

## QUESTION 11 :

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ .

Cocher l'assertion juste :

- ☐ ~~$f$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in ]a,b[ \quad f'(x) > 0$~~
- ☒ $f$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f$ est strictement croissante sur $]a,b[$
- ☐ $\exists c \in ]a,b[ \quad f'(c) = 0$
- ☐ $\exists ! c \in ]a,b[ \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

---

$f'(x) = 0$

$\exists c \in ]a,b[$

**QUESTION 12 :**

Cocher le développement limité (en 0 ) exact :

☐ $\cancel{\tan x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{15}x^6 + o\left(x^6\right)}$

☒ $\frac{1}{1-2x\cos\alpha + x^2} = 1 + (2\cos\alpha)x + (1+2\cos 2\alpha)x^2 + o\left(x^2\right)$

☐ $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$

☐ $\sqrt{\frac{x}{\tan x}} = 1 - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{40} + o\left(x^4\right)$

---

$$\frac{1}{1-2x\cos\alpha+x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{1-\underbrace{(2x\cos\alpha - x^2)}_{t\to 0}} \sim 1 + (2x\cos\alpha - x^2) + (2x\cos\alpha - x^2)^2 + o(x^2)$$

$$\underset{0}{\sim} 1 + 2x\cos\alpha - x^2 + 4x^2\cos^2\alpha - \cancel{4x^3\cos\alpha} + \cancel{x^4} + o(x^2)$$

$$\underset{0}{\sim} 1 + (2\cos\alpha)x - x^2 + 4x^2\cos^2\alpha + o(x^2)$$

$$\underset{0}{\sim} 1 + (2\cos\alpha)x - x^2 + 4x^2 \times \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\underset{0}{\sim} 1 + (2\cos\alpha)x - x^2 + 2x^2 + 2x^2\cos 2\alpha$$

$$\sim 1 + (2\cos\alpha)x + x^2 + 2x^2\cos 2\alpha$$

$$\frac{1}{1-t} \underset{0}{\sim} 1 + t + t^2 + o(t^2)$$

$$\sim 1 + (2\cos\alpha)x + x^2(1+2\cos 2\alpha)$$

**QUESTION 13 :**
Cocher l'encadrement exact :

- ☐ ~~$\forall x \in ]-1,0[ \quad x < ln(1+x) < \frac{1}{1+x}$~~
- ☐ ~~$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} < e^{-1} < \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$~~
- ☒ $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} < e^{-1} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$
- ☐ ~~$\exists n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \leq x^n$~~

---

$n = 1$ $\quad \cancel{\frac{(-1)^0}{0!}} + \cancel{\frac{(-1)^1}{1!}} + \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$

$\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < e^{-1} < \frac{1}{2}$

$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \ e^x \leq x^n$

$x = 1, \ e^1 = e > 1^n = 1$

**QUESTION 14 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $\cancel{\lim_{x \to +\infty} xf(x) = +\infty}$
- ☐ $\cancel{\lim_{x \to 0^+} xf(x) = +\infty}$
- ☒ $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
- ☐ ~~$\exists x > 0$ tel que : $f(x) = 0$~~

---

$f(x) = 0 \iff \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0 \iff 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \iff \frac{1}{x^2} = 0$ (impossible)

$f(x) = 1 \times \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

**QUESTION 15 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit $E$ l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tel que : $\bar{z}(z-1)=z^2(\bar{z}-1)$ .

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $E=\{0,1\}$ .
- ☐ $E$ est le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon 1.
- ☐ $E=\{0,1,-1\}$ .
- ☒ $E=\{1,0,i,-i\}$ .

---

$\bar{z}(z-1)=z^2(\bar{z}-1)$

si $z=1 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow 1\in E$

si $z=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow 0\in E$

si $(z\neq 0$ et $z\neq 1)$

on fixe $z=\underbrace{|z|}\,e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$

$|\bar{z}(z-1)|=|z^2(\bar{z}-1)|$ $\quad |\bar{z}-1|=|z-1|$

$|z||z-1|=|z|^2|z-1| \Rightarrow |z|=1$

$z=1\times e^{i\theta}=e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$

$\bar{z}(z-1)=z^2(\bar{z}-1)$

$e^{-i\theta}(e^{i\theta}-1)=(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}-1)$

$\Leftrightarrow e^{-i\theta}(e^{i\theta}-1)=e^{i2\theta}\times e^{-i\theta}(1-e^{i\theta})$

$\Leftrightarrow e^{i2\theta}=\dfrac{e^{i\theta}-1}{1-e^{i\theta}}=-1$

$\Leftrightarrow (e^{i\theta})^2=z^2=-1 \Leftrightarrow z=i$ ou $z=-i$

$E=\{1,0,i,-i\}$

**QUESTION 16 :**

On considère l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}\,dx$

En effectuant une intégration par parties, cocher la réponse juste :

- [x] $I = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3 + \pi\sqrt{3}}$
- [ ] $I = \frac{3\sqrt{3}}{3 + \pi\sqrt{3}}$
- [ ] $I = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$
- [ ] $I = \frac{3\sqrt{3} + \pi}{3 + \pi\sqrt{3}}$

$\frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2} \times \frac{x}{\cos x}$

$(\cos x + x\sin x)' = \cancel{-\sin x} + \cancel{\sin x} + x\cos x$

$= x\cos x$

$\int \frac{-U'(x)}{(U(x))^2} = \frac{1}{U(x)}$

on pose

$U(x) = \frac{x}{\cos x}$ $\quad U'(x) = \frac{\cos x + x\sin x}{(\cos x)^2}$

$V'(x) = \frac{x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2}$ $\quad V(x) = \frac{-1}{\cos x + x\sin x}$

$I = \left[\frac{-x}{(\cos x + x\sin x)\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{\cos x + x\sin x}}{\cos^2 x\,\cancel{(\cos x + x\sin x)}}\,dx$

$= \left[\frac{-\frac{\pi}{3}}{(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}} - 0\right] + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$= \frac{-\pi}{3(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{2}} + [\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{-\pi}{3(\frac{1}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12})} + \sqrt{3} - 0$

$= \frac{-\pi}{3(\frac{3 + \pi\sqrt{3}}{12})} + \sqrt{3} = \frac{-\pi \times 4}{3 + \pi\sqrt{3}} + \sqrt{3}$

$= \frac{-4\pi + 3\sqrt{3} + 3\pi}{3 + \pi\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3 + \pi\sqrt{3}}$

Scanné avec CamScanner

**QUESTION 17 :**

Pour tout entier naturel $n$ on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs multiple de $n$ : $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et pour $a, b \in \mathbb{N}$ , $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv /\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$

Cocher l'assertion juste :

- ☐ ~~$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \varnothing$ (l'ensemble vide).~~
- ☒ $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
- ☐ ~~$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$~~
- ☐ $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ← $7 \in \mathbb{Z}$ , $7 \notin 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$

---

$6 \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ , donc $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \neq \phi$

- $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \underbrace{2\times(-x)}_{\in 2\mathbb{Z}} + \underbrace{3x}_{\in 3\mathbb{Z}} \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$

- $10 \in 5\mathbb{Z}$ , $10 \in \cancel{2\mathbb{Z}} + 3\mathbb{Z}$ $\quad 10 = 2u + 3v \,/\, (u,v) \in \mathbb{Z}^2$

$\underbrace{10 - 2u}_{\text{pair}} = \underbrace{3v}_{\text{impair}}$

**QUESTION 18 :**

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de plans d'équations $n^2x+(2n-1)y+nz=3$

On note $E$ l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire $E=\{M(x,y,z)/\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ M\in P_n\}$

Cocher l'assertion juste :

- ☐ ~~$E=\varnothing$~~
- ☐ ~~$E$ est le plan d'équation : $x+y+z=3$~~
- ☐ ~~$E$ est la droite d'équation : $\begin{cases}x+y+z=3\\ y=-3\end{cases}$~~
- ☒ $E$ est le point de coordonnées $(0,-3,6)$

---

$\begin{cases}x+y+z=3\\ y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3+z=3\\ y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=6\\ y=-3\end{cases}$

$\begin{cases}x=1\\ z=5\\ y=-3\end{cases}$

$n^2\times 1+(2n-1)\times(-3)+5n=3$

$n^2-6n+\cancel{3}+5n=\cancel{3}$

$n^2-n=0$

$n=0$ ou $n=1$

$(1,5,-3)\in P_0$ et $P_1$

$(1,5,-3)\notin E$

**QUESTION 19 :**

Cocher l'assertion juste :

- [ ] $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=0$
- [ ] $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=+\infty$
- [x] $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\ln 2$
- [ ] $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ n'existe pas

---

$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$$

$x\to 1$ $\quad t\to 1 \quad \ln t \underset{1}{\sim} t-1$

$x^2\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,dt=\lim_{x\to 1}\left[\ln|t-1|\right]_x^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\ln|x^2-1|-\ln|x-1|$$

$$=\lim_{x\to 1}\ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|=\lim_{x\to 1}\ln|x+1|=\ln 2$$

**QUESTION 20 :**

On lance 2 dés cubiques (à six faces numérotées de 1 à 6) parfaitement équilibrés, de manières indépendantes. Tous les résultats sont équiprobables. On note $S$ la somme des deux faces obtenues. Soient $p$ la probabilité d'obtenir deux numéros identiques et $q$ celle d'obtenir une somme $S$ paire.

Cocher l'assertion juste :

- ☐ $p = \frac{C_6^1}{C_6^2}$ et $q = \frac{C_6^3}{C_6^2}$
- ☐ $p = \frac{1}{36}$ et $q = \frac{1}{2}$
- ☒ $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{1}{2}$
- ☐ $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{1}{4}$

---

P :

(1,1) (3,3) (5,5)

(2,2) (4,4) (6,6)

$\frac{6 \times 6}{\mathrm{card}(\Omega)}$

$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(Pair 1, Pair 2)

ou (impair 1, impair 2)

$q = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$

$= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner