خاص بكتابة المباراة	مباريات لتوظيف الأطر النظامية للأكاديميات : مباراة توظيف أساتذة التعليم الثانوي دورة دجنبر 2021 الموضوع	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للتقويم والامتحانات
رقم الامتحان		
الاسم الشخصي والعائلي :		
تاريخ ومكان الازدياد :		

3	المعامل	ثلاث ساعات	مدة الإنجاز:	الاختبار : اختبار في مادة التخصص	التخصص: الرياضيات

خاص بكتابة المباراة	- نقطة مادة التخصص بالأرقام ....على 75	التخصص : الرياضيات الاختبار : اختبار في مادة التخصص
الصفحة : 1 على 26	وبالحروف.................................... اسم المصحح وتوقيعه :	~~الموضوع~~ / ورقة الإجابة

Consignes et instructions aux candidats

1. La feuille sujet c'est une feuille de réponse :le candidat(e) répond sur la copie du sujet ;
2. Transcrire toutes les informations personnelles demandées à l'entête de la première page ;
3. L'épreuve comporte **50 questions** de la **Question1** à la **Question50** ;
4. Chaque candidat(e) n'a le droit d'utiliser qu'une **seule copie sujet/réponse ;**
5. Chaque question comporte 4 choix de réponses (**A, B, C, D**) dont une seule réponse est juste ;
6. On coche la lettre correspondante à la réponse correcte de la façon suivante :

Question :
$7+5=$
A. 13
B. 11
~~**C.**~~ 12
D. 14

7. La rature ou l'utilisation du **Blanco** sont strictement **INTERDITES** ;
8. Aucun document de quelque nature que ce soit n'est autorisé ;
9. L'usage de la calculatrice non programmable est permis ;
10. L'usage des téléphones mobiles, des tablettes et de tout appareil électronique intelligent est strictement **INTERDIT** ;
11. Toute réponse ne respectant pas les règles citées ci-dessus sera annulée.

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 1 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(n + u_n^{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
On a alors :

A. $\forall n \geq 1, u_n = \left(\dfrac{n^2 - n + 2}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

B. $\forall n \geq 2, u_n = \left(\dfrac{n^2 - n + 1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

C. $\forall n \geq 2, u_n = \left(\dfrac{n^2 - n + 2}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

D. $\forall n \geq 1, u_n = \left(\dfrac{n^2 - n + 1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

QUESTION 2 :

Soit f une fonction numérique paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right) f(x) + x$

La valeur de $g'(0)$ est égale à :

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 3 :

La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(x)\cos(2x)\sin(x)dx$ est égale à :

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

QUESTION 4 :

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

On donne au voisinage de 0 : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

Le développement limité à l'ordre 3 de f en 0 est :

A. $f(x)=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$

B. $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$

C. $f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$

D. $f(x)=x-x^2+\frac{4}{5}x^3+o(x^3)$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 5 :

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ converge et a pour somme :

A. 2

B. $\frac{7}{4}$

C. $\frac{11}{4}$

D. $\frac{5}{4}$

QUESTION 6 :

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = e^{-x^n}$

On a alors :

A. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in [0;1[\\ 0 & si\, x \geq 1 \end{cases}$

B. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in [0;1[\\ \frac{1}{e} & si\, x = 1 \\ 0 & si\, x > 1 \end{cases}$

C. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in [0;1[\\ 0 & si\, x \geq 1 \end{cases}$

D. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in [0;1[\\ \frac{1}{e} & si\, x = 1 \\ 0 & si\, x > 1 \end{cases}$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 7 :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ par : $f(x,y)=\frac{x}{y}\ln(xy)$

On a alors :

A. $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{y^2}\ln(xy)$

B. $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{y^2}(1+\ln(xy))$

C. $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{y^2}(2+\ln(xy))$

D. $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\frac{1}{y^2}\ln(xy)$.

QUESTION 8 :

On considère les ensembles suivants : $H=\{3\pi+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$ et $K=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

On a alors :

A. $H\subset K$

B. $K\subset H$

C. $H\cap K=\varnothing$

D. $H=K$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 9 :

On considère deux points A et B du plan tels que $AB=6$ et I est le milieu de [AB]
L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-5$ est :

A. Le cercle de centre I et de rayon 2

B. Le cercle de centre I et de rayon 4

C. La médiatrice du segment $[AB]$

D. La droite qui passe par I et de vecteur directeur $-5\vec{i}$

QUESTION 10 :

On considère les droites :

$$(\Delta_1):\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad (\Delta_2):\begin{cases} y=2 \\ x-z=2 \end{cases}$$

La distance entre les droites (D_1) et (D_2) est égale à :

A. 0

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 11 :

Soit z_1 , z_2 et z_3 des nombres complexes tels que :

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$$

La valeur de $|z_1 + z_2 + z_3|$ est égal à :

A. 2

B. 1

C. 3

D. $\frac{1}{2}$

QUESTION 12 :

On considère deux fonctions numériques f et g à variables réelles telles que :

$$g(x) = 1 - x^2 \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$$

La valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à :

A. $\frac{3}{4}$

B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\sqrt{2}$

16

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 13:

Pour tout entier naturel n, l'un des trois entiers naturels $n, n+10$ et $n+20$ est un multiple de :

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

QUESTION 14 :

Soit x un nombre réel.

On considère la matrice $M(x)$ définie par : $M(x)=\begin{pmatrix} 1+x^2 & x^2 & x^2 \\ x-2022 & x-2021 & x-2022 \\ x+2022 & x+2022 & x+2023 \end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice $M(x)$ est égal à :

A. $(x+2021)^2$

B. $(x-2022)^2$

C. $(x+1)^2$

D. $(x-1)^2$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 15 :

Soit F la fraction rationnelle définie par : $F(X)=\dfrac{X^4}{(X-1)(X^2-1)}$

La décomposition de $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ est :

A. $F(X)=X-\dfrac{1}{4(X+1)}+\dfrac{1}{4(X-1)}+\dfrac{1}{2(X-1)^2}$

B. $F(X)=X+1+\dfrac{1}{4(X+1)}+\dfrac{7}{4(X-1)}+\dfrac{1}{2(X-1)^2}$

C. $F(X)=X+1+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{1}{2(X-1)}+\dfrac{1}{(X-1)^2}$

D. $F(X)=X+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{3}{4(X-1)}+\dfrac{1}{4(X-1)^2}$

QUESTION 16 :

On note par $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel de dimension 4.

On considère l'ensemble $E=\left\{\begin{pmatrix} a-b & a-c \\ b-c & b-a \end{pmatrix} / (a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$. On a alors :

A. $(E,+,.)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

B. $(E,+,.)$ est un espace vectoriel de dimension 3

C. $(E,+,.)$ est un espace vectoriel de dimension 2

D. $(E,+,.)$ est un espace vectoriel de dimension 4

16

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 17 :

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de la matrice M sont :

A. 0 , 1 et 2

B. 0 , -1 et 2

C. 0 et 1

D. -1 et -2

QUESTION 18 :

Soit $n \in \mathbb{N}$:

On pose $E = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n^n$.

La valeur de E est égale à :

A. 2^{n-1}

B. $n2^{n-1} + 2^n$

C. $n2^{n-1}$

D. $(n+1)2^n$

AK

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 19 :

Soient E et F deux événements tels que : $P(E)=P(F)=\frac{4}{5}$.

On a alors :

A. $P(E\cap F)\leq\frac{2}{5}$

B. $\frac{2}{5}<P(E\cap F)<\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{5}\leq P(E\cap F)\leq\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{5}<P(E\cap F)\leq 1$

QUESTION 20 :

Une urne contient trois boules : une blanche, une noire et une verte.

On tire successivement et avec remise une boule de cette urne jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche pour la première fois.

On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première boule blanche.

On a alors :

A. $E(X)=3$ et $V(X)=2$

B. $E(X)=3$ et $V(X)=6$

C. $E(X)=\frac{1}{3}$ et $V(X)=\frac{2}{9}$

D. $E(X)=9$ et $V(X)=\frac{3}{4}$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 21 :

Soit $a \in]1;+\infty[$. On pose $I_a = \iint_{D_a} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ tel que $D_a = \left[\frac{1}{a};a\right] \times [0;1]$.

La valeur de l'intégrale I_a est égale à :

A. $\frac{\pi}{2} + \ln(a)$

B. $\frac{\pi}{2}\ln(3a)$

C. $\pi \ln(2a)$

D. $\frac{\pi}{2}\ln(a)$

QUESTION 22 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{g(x)} \text{ et } g(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt.$$

La valeur de $f'(\sqrt{2})$ est égale à :

A. $\frac{4\sqrt{2}}{5}e^{-4}$

B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}e^{-3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{5}e^{-1}$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 23 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=2x^3+6xy-3y^2+2$
On a alors :

A. f n'admet pas d'extremums

B. f admet un maximum local en $(-1;-1)$

C. f admet un minimum local en $(-1;-1)$

D. f admet un maximum local en $(0;0)$

QUESTION 24 :

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(0)=5$.

On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-3f(2x)+f(4x)}{x^2}$ est égale à :

A. 15

B. 10

C. 5

D. 20

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 25 :

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$. Le produit $\times$ de $M_2(\mathbb{R})$ induit sur H une loi de composition interne dont l'élément neutre est :

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

QUESTION 26 :

$\lim\limits_{x \to 0} \left(2^x + 3^x - 4^x\right)^{\frac{1}{x}}$ est égale à :

A. $+\infty$

B. $\frac{2}{3}$

C. 1

D. $\frac{3}{2}$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 27 :

Soit x , y et θ des nombres réels tels que : $\frac{3}{2+e^{i\theta}}=x+iy$.

La valeur de l'expression $(x-2)^2+y^2$ est égale à :

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

QUESTION 28 :

Soit a et b deux nombres entiers naturels tels que $a\wedge b=1$.

On note par $a\wedge b$ le plus grand diviseur commun de a et b.

On a alors :

A. $2\wedge ab=(2\wedge a)\times(2\wedge b)$

B. $(a+b)\wedge(a-b)=1$

C. $(a+b)\wedge(a-b)=2$

D. $(2a+b)\wedge(a+2b)=1$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 29 :

On lance 115 fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de 6 obtenus sur les 115 lancers.

$P(X \geq 2)$ est égale à :

A. $1-20\left(\frac{1}{6}\right)^{115}$

B. $20\left(\frac{1}{6}\right)^{114}$

C. $1-20\left(\frac{5}{6}\right)^{114}$

D. $20\left(\frac{1}{6}\right)^{115}$

QUESTION 30 :

Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$.

La valeur de $a+b+c$ est égale à :

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

AX

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 31 :

On pose : $\omega = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Soit a, b et c des nombres réels tels que :

$$\frac{1}{a+\omega}+\frac{1}{b+\omega}+\frac{1}{c+\omega}=\frac{2}{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a+\omega^2}+\frac{1}{b+\omega^2}+\frac{1}{c+\omega^2}=\frac{2}{\omega^2}$$

La valeur de l'expression $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$ est égale à :

A. 0

B. 2

C. -3

D. -4

QUESTION 32 :

On considère les ensembles :

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2-y^2=3x-4y\}$ et $H=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2xy=4x+3y\}$.

On pose $K=\{x^2+y^2 \,/\, (x;y)\in F\cap H\}$.

On a alors :

A. $K=\{0;16\}$

B. $K=\{0;1;9;16\}$

C. $K=\{1;4;25\}$

D. $K=\{0;25\}$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 33 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard.

On note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Alors X suit :

A. La loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{n}$.

B. La loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\frac{1}{n}$.

C. La loi uniforme de paramètre $\frac{1}{n}$.

D. La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

QUESTION 34 :

On pose : $I = \int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}\,dx + 3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\,dx$.

La valeur de I est égale à :

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

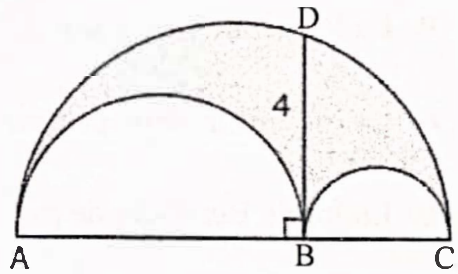
D. 0

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 35 :

On construit d'un même côté de la droite (AB) les demi-cercles de diamètre $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Soit D un point du demi-cercle de diamètre $[AC]$ tel que $(AC)\perp(BD)$ et $BD=4$. (Voir figure)

L'aire de la région grise est :



A. 2π

B. 4π

C. 6π

D. 8π

QUESTION 36 :

On note par $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Soit M la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2=M-I$ où $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice M est égal à :

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

QUESTION 37 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose $Y = -\ln X$. Alors Y suit :

A. La loi uniforme sur $[0,1]$

B. La loi uniforme sur $[-1,0]$

C. La loi exponentielle de paramètre 1

D. La loi exponentielle de paramètre(-1)

QUESTION 38 :

Soit $(a_n)_{n>1}$ une suite numérique. On a :

A. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

B. Si $a_n > 0$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

C. Si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+a_n}{2+a_n}$ converge.

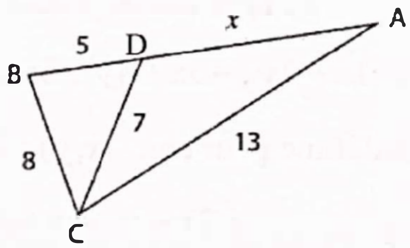
D. Si $a_n > 0$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 39 :

Soit ABC un triangle tel que :

$BD = 5$; $DC = 7$; $BC = 8$; $AC = 13$ et $AD = x$



La valeur de x est égale à :

A. 12

B. 11

C. 10

D. 9

QUESTION 40 :

Dans l'anneau $(A,+,\times)$ tel que $A = \{a + \sqrt{2}b \,/\, a,b \in \mathbb{Z}\}$.

L'élément $a + \sqrt{2}b$ (diffèrent de 0) est inversible si :

A. $a = b$

B. $a^2 = b^2$

C. $a^2 = 2b^2 + 1$

D. $a^2 = -2b^2$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 41 :

Soit $a>1$ .Une variable aléatoire continue suit une loi de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+4\ln x}{x} & si\ x\in[1;a]\\ 0 & sinon\end{cases}$$

La valeur de a est égale à :

A. $\sqrt{e}$

B. $\dfrac{1}{e}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

D. e

QUESTION 42 :

Soit $(a_n)_{n>1}$ une suite numérique. On a :

A. Si $a_n>0$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L<1$

B. Si $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L<1$ alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

C. Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge alors la suite $(a_n)_{n>1}$ est divergente.

D. Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{a_n+n^2}$ converge.

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

QUESTION 43 :

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = -x$.

On a alors :

A. f est bijective.

B. f est croissante sur $\mathbb{R}$

C. f est décroissante sur $\mathbb{R}$

D. $f(0) = 1$

QUESTION 44 :

On pose : $I =]-\infty;1[$ et $J =]\ln(2)-1;+\infty[$ et soit $f : I \to J$

$$x \mapsto \ln(1+x^2) - x$$

Soit f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur J

Le développement limité à l'ordre 4 de f^{-1} en 0 est :

A. $f^{-1}(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{7}{2}x^4 + o(x^4)$

B. $f^{-1}(x) = -x + x^2 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)$

C. $f^{-1}(x) = -x - \frac{1}{3}x^2 - 2x^3 + \frac{7}{2}x^4 + o(x^4)$

D. $f^{-1}(x) = -x + x^2 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)$

IX

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 45 :

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x,y)=(x-2y\,,\,-3x+4y)$. Sachant que f est bijective, sa bijection réciproque

f^{-1} est définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par :

A. $f^{-1}(x,y)=\left(\dfrac{2x-y}{5},\dfrac{-3x+y}{10}\right)$

B. $\cancel{f^{-1}(x,y)}=\left(\dfrac{-x-2y}{5},\dfrac{-3x-y}{10}\right)$

C. $f^{-1}(x,y)=\left(\dfrac{3x+y}{2},2x+y\right)$

D. $f^{-1}(x,y)=\left(-2x-y\,,\,-\dfrac{3x}{2}-\dfrac{y}{2}\right)$

QUESTION 46 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas telle que : $u_0=1$.

Alors pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k u_{k+1}}$ égale à :

A. $\dfrac{n+1}{u_{n+1}}$

B. $\dfrac{n}{u_{n+1}}$

C. $\dfrac{n+1}{u_n}$

D. $\dfrac{n}{u_n}$

AK

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 47 :

L'intégrale curviligne : $\int_C \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ le long de la courbe C définie par le segment qui relie les points $A(1;-1)$ et $B(2;0)$ est égale à :

A. $\ln(2)$

B. $\frac{\ln(2)}{2}$

C. $\frac{\ln(3)}{2}$

D. $\ln(3)$

QUESTION 48 :

Soit (ζ) un cercle tangent aux deux droites d'équations cartésiennes respectives

$x-2y+1=0$ et $x-2y+11=0$

Le rayon du cercle (ζ) est égal à :

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

لا يكتب أي شيء
في هذا الإطار

QUESTION 49 :

L'inverse de $\overline{7}$ dans $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ est :

A. $\overline{17}$

B. $\overline{29}$

C. $\overline{43}$

D. $\overline{7}$

QUESTION 50 :

Soit A et B deux parties d'un ensemble E et f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : P(E) &\to P(A)\times P(B) \\ X &\mapsto (X\cap A, X\cap B) \end{aligned}$$

Si f est injective alors :

A. $A\cap B=\varnothing$

B. $A\cup B=E$

C. $A\cap \overline{B}=\varnothing$

D. $A\cup \overline{B}=E$

Question 1:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

On a : $U_{k+1} = \left(k + U_k^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}$

donc : $U_{k+1}^{k} = k + U_k^{k-1}$

donc : $U_{k+1}^{k} - U_k^{k-1} = k$

Soit $n \geqslant 2$

On a : $\sum_{k=1}^{n-1} \left(U_{k+1}^{k} - U_k^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k$

donc : $\sum_{k=1}^{n-1} U_{k+1}^{k} - \sum_{k=1}^{n-1} U_k^{k-1} = \frac{(n-1-\cancel{1}+\cancel{1}) \times (\cancel{1}+n-\cancel{1})}{2}$

donc :

$$\sum_{k=2}^{n} U_k^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} U_k^{k-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc :

$$\left(\cancel{\sum_{k=2}^{n-1} U_k^{k-1}}\right) + U_n^{n-1} - U_1^{0} - \cancel{\sum_{k=2}^{n-1} U_k^{k-1}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc : $U_n^{n-1} - 1 = \frac{n^2 - n}{2}$

donc : $U_n^{n-1} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$

donc :

$$\forall n \geq 2, \quad U_n = \left(\frac{n^2 - n + 2}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Question 2 :

On a g dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g'(x) = x^2 f(x) + \left(\frac{x^3}{3} + 1 \right) f'(x) + 1$$

donc : $g'(0) = f'(0) + 1$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(-x \in \mathbb{R})$ et $f(x) = f(-x)$ (car f est paire)

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = -f'(-x)$

d'où : $f'(0) = -f'(0)$

d'où : $f'(0) = 0$

donc : $g'(0) = 0 + 1$

donc : $g'(0) = 1$

Question 3:

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a:

$$\cos(x)\cos(2x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})\times(e^{i2x}+e^{-i2x})}{4}$$

$$= \frac{e^{i3x}+e^{-ix}+e^{ix}+e^{-i3x}}{4}$$

donc:

$$\cos(x)\cos(2x)\sin(x) = \frac{(e^{i3x}+e^{-ix}+e^{ix}+e^{-i3x})(e^{ix}-e^{-ix})}{8i}$$

$$= \frac{e^{i4x}-e^{i2x}+\cancel{1}-e^{-i2x}+\cancel{e^{i2x}}-\cancel{1}+\cancel{e^{-i2x}}-e^{-i4x}}{8i}$$

$$= \frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{8i}$$

$$= \frac{1}{4}\sin(4x)$$

donc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(2x)\sin(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin(4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(4x)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

donc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(x)\cos(2x)\sin(5x)\,dx = -\frac{1}{16} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right)$$

$$= \cancel{-}\frac{1}{16} \times (0-1)$$

donc: $$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(x)\cos(2x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{16}}$$

Question 4:

~~Essai~~ Soit $x \in]-1, +\infty[$

On a: $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$= (1+x)^{-1}\ln(1+x)$$

donc:

$$f(x) = \left(1 + (-1)x + \frac{(-1)\times(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)\times(-2)\times(-3)}{3!}x^3\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)$$

donc:

$$f(x) = (1 - x + x^2 - x^3) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)x^3 + o(x^3)$$

donc:

$$\boxed{f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Question 8:

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

Soit $x \in H$

donc: $\exists k \in \mathbb{Z}$; $x = 3\pi + 2k\pi$

$$= \frac{\pi}{3} + \left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{8\pi + 2k\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{2\times(4+2k)\pi}{3}$$

donc:

$\exists k' = (4+2k) \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k'\pi}{3}$

d'où: $x \in K$

donc: $\boxed{H \subset K}$

Question 9:

On a:

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = -5$

$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -5$

$\Leftrightarrow MI^2 + \left(-IA \times IB\right) = -5$

$\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -5$

$\Leftrightarrow MI^2 - 9 = -5$

$\Leftrightarrow MI^2 = 4$

$\Leftrightarrow MI = 2$

d'où l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = -5$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

Question 11: Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

On a:

$$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| = \left|\frac{\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}}+\frac{\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_3}}{z_3\overline{z_3}}\right|$$

$$= \left|\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}+\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}+\frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}\right|$$

$$= \left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right| \quad \left(\text{car: } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1\right)$$

$$= \left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|$$

$$= \left|z_1+z_2+z_3\right|$$

or: $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| = 1$

donc: $\boxed{\left|z_1+z_2+z_3\right| = 1}$

Question 12:

On a:

$$g(x) = \frac{1}{2} \iff 1 - x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\iff x^2 = 1/2$$

donc: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-1/2}{1/2}$

$$= \frac{1/2}{1/2}$$

donc: $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 1}$

Question 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$

* Première cas : $n \equiv 0[3]$

donc n est un multiple de 3

donc l'un des trois naturels n, $n+10$ et $n+20$ est un multiple de 3.

* $2^{ème}$ cas : $n \equiv 1[3]$

on sait que : $20 \equiv 20[3]$

Puisque $n \equiv 1[3]$ et $20 \equiv 20[3]$ alors $n+20 \equiv 21[3]$

et on sait que : $21 \equiv 0[3]$

Puisque $n+20 \equiv 21[3]$ et $21 \equiv 0[3]$ alors $n+20 \equiv 0[3]$

d'où $n+20$ est un multiple de 3

donc l'un des trois naturels n, $n+10$ et $n+20$ est un multiple de 3.

* $3^{ème}$ cas : $n \equiv 2[3]$

on sait que : $10 \equiv 10[3]$

Puisque $n \equiv 2[3]$ et $10 \equiv 10[3]$ alors $n+10 \equiv 12[3]$

Puisque $n+10 \equiv 12[3]$ et $12 \equiv 0[3]$ alors $n+10 \equiv 0[3]$

~~donc~~ d'où $n+10$ est un multiple de 3

donc l'un des trois naturels n, $n+10$ et $n+20$ est un multiple de 3.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, l'un des trois entiers naturels n, $n+10$ et $n+20$ est un multiple de 3

Question 14 :

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a :

$$\det(M(x)) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x^2 & x^2 \\ x-2022 & x-2021 & x-2022 \\ x+2022 & x+2022 & x+2023 \end{vmatrix}$$

$C_3 - C_1$

$$= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x^2 & 0 \\ x-2022 & x-2021 & -1 \\ x+2022 & x+2022 & 1 \end{vmatrix}$$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

$$= (-1)^{2+3} \times (-1) \times \left[(1+x^2)(x+2022) - x^2(x+2022) \right]$$
$$+ (-1)^{3+3} \times 1 \times \left[(1+x^2)(x-2021) - x^2(x-2022) \right]$$

$$= x + 2022 + x^3 + 2022x^2 - x^3 - 2022x^2 + x - 2021$$
$$+ x^3 - 2021x^2 - x^3 + 2022x^2$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

$$= (x+1)^2$$

donc le déterminant de la matrice $M(x)$ est égal à :

$$(x+1)^2$$

Question 15:

On a:
$$F(x) = \frac{x^4}{(x-1)(x^2-1)}$$
$$= \frac{x^4}{(x-1)^2(x+1)}$$

On a:
$$(x-1)^2(x+1) = (x^2-2x+1)(x+1)$$
$$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + x + 1$$
$$= x^3 - x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3 - x^2 - x + 1 \\ \hline - \quad x^4 - x^3 - x^2 + x & x + 1 \\ \hline x^3 + x^2 - x & \\ - \quad x^3 - x^2 - x + 1 & \\ \hline 2x^2 - 1 & \end{array}$$

donc: $$F(x) = x + 1 + \frac{2x^2-1}{(x-1)^2(x+1)}$$

On a: $$\frac{2x^2-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad (*)$$

$(*) \times (X-1)^2 \Rightarrow \frac{2X^2-1}{X+1} = \frac{a(X-1)^2}{X+1} + b(X-1) + c$

$X = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = c$

$(*) \times (X+1) \Rightarrow \frac{2X^2-1}{(X-1)^2} = a + \frac{b(X+1)}{X-1} + \frac{c(X+1)}{(X-1)^2}$

$X = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} = a$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

donc:

$$\frac{2X^2-1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{b}{X-1} + \frac{1}{2(X-1)^2}$$

$X = 0 \Rightarrow -1 = \frac{1}{4} - b + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b = \frac{3}{4} + 1$

$\Rightarrow b = \frac{7}{4}$

donc:

$$F(X) = X + 1 + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{7}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2}$$

Question 17:

On a:

$$\det(M - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{1+1} \times (-\lambda) \times [-\lambda(1-\lambda) - 1] + (-1)^{3+1} \times 1 \times \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \times [\lambda^2 - \lambda - 1] + \lambda = 0$$

donc :

$\det(M - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow -\lambda[\lambda^2 - \lambda - 2] = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

donc les valeurs propres de la matrice M sont :

$0, -1$ et 2

Question 18 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x(1+x)^n$$

On a f dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a :

$$f'(x) = (1+x)^n + x \times n(1+x)^{n-1}$$

donc $f'(1) = 2^n + n2^{n-1}$

$= n2^{n-1} + 2^n$

D'autre part, on a :

$$f(x) = x \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times 1^{n-k}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1}$$

donc :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k \times (k+1) x^k \right]$$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

donc:

$$f'(1) = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, C_n^k\right]$$

$$= 1\times C_n^0 + 2\times C_n^1 + 3\times C_n^2 + \cdots + (n+1)\, C_n^n$$

$$f'(1) = E$$

or: $f'(1) = n\,2^{n-1} + 2^n$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $E = n\,2^{n-1} + 2^n$

Pour $n=0$ on a: $E = C_n^0$

$= 1$

$= 0\times 2^{-1} + 2^0$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $E = n\,2^{n-1} + 2^n$

donc la valeur de E est égale à:

$n\,2^{n-1} + 2^n$

Question 22:

On a: $f'(x) = g'(x)\, e^{g(x)}$

donc: $f'(\sqrt{2}) = g'(\sqrt{2}) \times e^{g(\sqrt{2})}$

$= g'(\sqrt{2}) \times e^0$

$f'(\sqrt{2}) = g'(\sqrt{2})$

$\left(\text{car } g(\sqrt{2}) = \int_2^2 \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,dt = 0 \right)$

On a:

$$g'(x) = 2x \times \frac{e^{-x^2}}{1+x^4}$$

donc:

$$g'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \times \frac{e^{-2}}{1+4}$$

donc: $$g'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{5} e^{-2}$$

donc: $$f'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{5} e^{-2}$$

Question 24:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(x) - 3f(2x) + f(4x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2f'(x) - 6f'(2x) + 4f'(4x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2f''(x) - 12f''(2x) + 16f''(4x)}{2}$$

$$= \lim_{x \to 0} f''(x) - 6f''(2x) + 8f''(4x)$$

$$= f''(0) - 6f''(0) + 8f''(0)$$

$$= 3f''(0)$$

donc:

$$= 3 \times 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(x) - 3f(2x) + f(4x)}{x^2} = 15$$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

Question 26 :

On a :

$$\left(2^x+3^x-4^x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(2^x+3^x-4^x\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln\left[e^{x\ln(2)}+e^{x\ln(3)}-e^{x\ln(4)}\right]}$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln\left[e^{x\ln(2)}\left\{1+e^{x\ln\left(\frac{3}{2}\right)}-e^{x\ln(2)}\right\}\right]}$$

$$= 2\times e^{\frac{1}{x}\ln\left[1+e^{x\ln\left(\frac{3}{2}\right)}-e^{x\ln(2)}\right]}$$

On a :

$$e^{x\ln(3/2)} = 1+x\ln\left(\frac{3}{2}\right)+o(x)$$

et

$$-e^{x\ln(2)} = -1-x\ln(2)+o(x)$$

donc : $$e^{x\ln\left(\frac{3}{2}\right)}-e^{x\ln(2)} = x\ln\left(\frac{3}{4}\right)+o(x)$$

donc :

$$\ln\left[1+e^{x\ln(3/2)}-e^{x\ln(2)}\right] = x\ln\left(\frac{3}{4}\right)+o(x)$$

donc :

$$\frac{1}{x}\ln\left[1+e^{x\ln(3/2)}-e^{x\ln(2)}\right] = \ln\left(\frac{3}{4}\right)+o(1)$$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

donc:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left[1 + e^{x\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - e^{x\ln(2)}\right] = \ln(3/4)$$

d'où:

$$\lim_{x \to 0} \left(2^x + 3^x - 4^x\right)^{\frac{1}{x}} = 2 \times e^{\ln(3/4)}$$

$$= 2 \times \frac{3}{4}$$

donc: $\lim_{x \to 0} \left(2^x + 3^x - 4^x\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$

Question 17: soit x, y et θ des nombres réels tels que:

~~On a:~~ $\cancel{\frac{3}{2+e^{i\theta}}}$

$$\frac{3}{2 + e^{i\theta}} = x + iy$$

donc: $\frac{3}{2 + e^{i\theta}} - 2 = (x-2) + iy$

donc: $\frac{3 - 4 - 2e^{i\theta}}{2 + e^{i\theta}} = (x-2) + iy$

donc: $\frac{-1 - 2e^{i\theta}}{2 + e^{i\theta}} = (x-2) + iy$

d'où: $\left|(x-2) + iy\right|^2 = \left|\frac{-1 - 2e^{i\theta}}{2 + e^{i\theta}}\right|^2$

d'où :

$$(x-2)^2+y^2=\frac{|1+2\cos(\theta)+i\,2\sin(\theta)|^2}{|2+\cos(\theta)+i\sin(\theta)|^2}$$

$$=\frac{(1+2\cos(\theta))^2+4\sin^2(\theta)}{(2+\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}$$

$$=\frac{1+4\cos(\theta)+4}{4+4\cos(\theta)+1}$$

$$=\frac{5+4\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)}$$

$$=1$$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

d'où : $(x-2)^2+y^2=1$

Question 30 :

On a : $a\,e^{x}=a+ax+a\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$-b\cos(x)=-b+b\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$c\,e^{-x}=c-cx+c\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

donc : $a\,e^{x}-b\cos(x)+c\,e^{-x}=(a-b+c)+(a-c)x+\frac{1}{2}(a+b+c)x^2+o(x^2)$

et on a : $x\sin(x)=x^2+o(x^2)$

donc:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^{x}-b\cos(x)+ce^{-x}}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(a-b+c)+(\text{[illegible]})}{x^2+o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(a-b+c)}{x^2}+\frac{(a-c)}{x}+\frac{1}{2}(a+b+c)+o(1)}{1+o(1)}$$

donc:
$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a-c=0 \\ \frac{1}{2}(a+b+c)=2 \end{cases}$$

d'où: $\boxed{a+b+c=4.}$

Question 35:

Soit S l'aire de la région grise.

On a: $S = \pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

$$= \frac{\pi}{4}\left[AC^2 - AB^2 - BC^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\cancel{AB^2} + 2AB\times BC + \cancel{BC^2} - \cancel{AB^2} - \cancel{BC^2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} AB\times BC$$

~~Puisque le triangle ADC est rectangle en D~~

~~donc: Puisque le triangle ADC~~

Puisque ADC est un triangle rectangle en D

alors: $BD^2 = AB\times BC$

donc: $S = \frac{\pi}{2}\times BD^2$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

donc: $\mathcal{A} = \frac{\pi}{2} \times 4^2$

$= \frac{16\pi}{2}$

$= 8\pi$

d'où l'aire de région grise est:

8π

Question 36: Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

On a: $M^2 = M - I$

donc: $M - M^2 = I$

donc: $M \times (I - M) = I$

d'où: $-M \times M^2 = I$

donc: $M^3 = -I$

donc: $\det(M^3) = \det(-I)$
$= -1$

donc: $(\det(M))^3 = -1$

donc: $\det(M) = -1$ (car $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Downarrow \det(M) \in \mathbb{R}$)

d'où le déterminant de la matrice M est égal à:

-1

Question 39 :

Dans le triangle ABC, on a :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AC \cos(\widehat{ABC}) \quad (*)$$

donc :

$$169 = 64 + (5+x)^2 - 2 \times 8 \times (5+x) \cos(\widehat{ABC})$$

Dans le triangle DBC, on a :

$$DC^2 = DB^2 + BC^2 - 2\, DB \times BC \cos(\widehat{DBC})$$

or : $\widehat{DBC} = \widehat{ABC}$

donc :

$$DC^2 = DB^2 + BC^2 - 2\, DB \times BC \cos(\widehat{ABC})$$

donc :

$$49 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \cos(\widehat{ABC})$$

donc : $\cos(\widehat{ABC}) = 1/2$

$$(*) \Rightarrow 105 = (5+x)^2 - 2 \times 8 \times (5+x) \times \frac{1}{2}$$

donc : $x^2 + 2x - 120 = 0$

on a : $\Delta = 4 - 4 \times (-120)$

$= 484$

donc : $x_1 = \frac{-2-22}{2}$

$= \frac{-24}{2}$

$= -12$

$x_2 = \frac{-2+22}{2}$

$= 10$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

donc : $x = 10$ (car $x > 0$)

La valeur de x est égale à :

$$10$$

Question 45 :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$f(a,b) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = x \\ -3a + 4b = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x + 2b \\ -2b = 3x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x + 2b \\ b = \frac{-3}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x - 3x - y \\ b = -\frac{3x}{2} - \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2x - y \\ b = -\frac{3x}{2} - \frac{y}{2} \end{cases}$$

donc : $f^{-1}(x, y) = \left(-2x - y, -\frac{3x}{2} - \frac{y}{2}\right)$

Pr. BADR-EZZAMANE MUSTAPHA

Question 1:

Soit $k \geq 1$

On a:

$$u_{k+1} = \left(k + u_k{}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Donc:

$$u_{k+1}{}^{k} = k + u_k{}^{k-1}$$

Donc:

$$u_{k+1}{}^{k} - u_k{}^{k-1} = k$$

Soit $n \geq 2$

On a:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(u_{k+1}{}^{k} - u_k{}^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Donc:

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}{}^{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k{}^{k-1}\right) = \frac{(n-1)\times n}{2}$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Donc:

$$\left(\sum_{k=2}^{n} u_k{}^{k-1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k{}^{k-1}\right) = \frac{(n-1)\times n}{2}$$

Donc:

$$\left(\sum_{k=2}^{n-1} u_k{}^{k-1}\right) + u_n{}^{n-1} - \left(\sum_{k=2}^{n-1} u_k{}^{k-1}\right) + u_1{}^{0} = \frac{(n-1)\times n}{2}$$

Donc:

$$u_n{}^{n-1} - 1 = \frac{(n-1)\times n}{2}$$

Donc:

$$u_n{}^{n-1} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

Donc:

$$\forall n \geq 2, u_n = \left(\frac{n^2 - n + 2}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Question 2:

On a g dérivable sur $\mathbb{R}$ et pout tout x de $\mathbb{R}$ on a:

$$g'(x) = x^2 f(x) + \left(\frac{x^3}{3} + 1\right) f'(x) + 1$$

Donc:

$$g'(0) = f'(0) + 1$$

On a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} \; et \; f(-x) = f(x)$$

(Car f est paire)

D'où:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x)$$

D'où:

$$-f'(0) = f'(0)$$

D'où:

$$f'(0) = 0$$

Donc:

$$g'(0) = 1$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Question 3:

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} \cos(x)\cos(2x)\sin(x) &= \cos(x)\sin(x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos(x)\sin(x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sin(2x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{4}\sin(4x) \end{aligned}$$

D'où: $$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(x)\cos(2x)\sin(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{4}\sin(4x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{16}[\cos(4x)]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

Donc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(x)\cos(2x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{16}$$

Question 4:

Soit $x \in]-1, +\infty[$

On a:

$$f(x) = (1+x)^{-1}\ln(1+x)$$

Au voisinage de 0 on a:

$$f(x) = (1 - x + x^2 - x^3)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)$$

$$= x + \left(\frac{-1}{2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)x^3 + o(x^3)$$

Donc:

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

Question 5:

Soit $x \in H$

Donc:

$$\exists k \in \mathbb{Z};\quad x = 3\pi + 2k\pi$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Donc:

$$\exists k \in \mathbb{Z};\quad x = \frac{\pi}{3} + \left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

Donc:

$$\exists k \in \mathbb{Z};\quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} + 2k\pi$$

Donc:

$$\exists k \in \mathbb{Z};\quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2(4+3k)\pi}{3}$$

D'où:

$$\exists k' \in \mathbb{Z};\quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k'\pi}{3}$$

Car $\forall k \in \mathbb{Z};\ (4+3k) \in \mathbb{Z}$

D'où:

$$x \in K$$

D'où:

$$H \subset K$$

On a:

$\frac{\pi}{3} \in K$ et $\frac{\pi}{3} \notin H$ donc: $K \not\subset H$ donc: $K \neq H$

Question 6:

On a:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -5 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = -5$$
$$\Leftrightarrow \ MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -5$$
$$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}.\vec{0} - IA \times IB = -5$$
$$\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -5$$
$$\Leftrightarrow MI^2 - 9 = -5$$
$$\Leftrightarrow MI^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow MI = 2$$

D’où l’ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -5$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

Question 7:

On a:

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\frac{\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} + \frac{\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_3}}{z_3\overline{z_3}}\right|$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Donc:

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} + \frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}\right|$$
$$= \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right|$$

Car:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$

D’où:

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right|$$
$$= |z_1 + z_2 + z_3|$$

On a:

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$$

Donc:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = 1$$

Question 8:

On a:

$$g(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x_0^2 = \frac{1}{2}$$

D'où:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(g(x_0)) = \frac{1 - x_0^2}{x_0^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Donc:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Question 9:

Soit $n \in \mathbb{N}$

- Première cas: $n \equiv 0[3]$

Donc n est un multiple de 3.

- Deuxième cas: $n \equiv 1[3]$

On sait que $20 \equiv 20[3]$

Puisque $n \equiv 1[3]$ et $20 \equiv 20[3]$ alors $n + 20 \equiv 21[3]$

On a: $21 \equiv 0[3]$

Puisque $n + 20 \equiv 21[3]$ et $21 \equiv 0[3]$ alors $n + 20 \equiv 0[3]$

Donc $n + 20$ est un multiple de 3.

- Troisième cas: $n \equiv 2[3]$

On sait que $10 \equiv 10[3]$

Puisque $n \equiv 2[3]$ et $10 \equiv 10[3]$ alors $n + 10 \equiv 12[3]$

On a: $12 \equiv 0[3]$

Puisque $n + 10 \equiv 12[3]$ et $12 \equiv 0[3]$ alors $n + 10 \equiv 0[3]$

Donc $n + 10$ est un multiple de 3.

Conclusion:

Pour tout entier naturel n, l'un des trois entiers naturels n, $n + 10$ et $n + 20$ est un multiple de 3.

Question 10:

Soit x un nombre réel.

On a:

$$\det\big(M(x)\big) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x^2 & x^2 \\ x-2022 & x-2021 & x-2022 \\ x+2022 & x+2022 & x+2023 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \end{array} C_3 - C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x^2 & 0 \\ x-2022 & x-2021 & -1 \\ x+2022 & x+2022 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1+x^2 & x^2 \\ x+2022 & x+2022 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1+x^2 & x^2 \\ x-2022 & x-2021 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\left(1+x^2\right) \times (x+2022) - x^2 \times (x+2022)\right] + \left(1+x^2\right) \times (x-2021) - x^2 \times (x-2022)$$

$$= x + 2022 + x^3 + 2022x^2 - x^3 - 2022x^2 + x - 2021 + x^3 - 2021x^2 - x^3 + 2022x^2$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

Donc:

$$\det\big(M(x)\big) = (x+1)^2$$

Le déterminant de la matrice $M(x)$ est égal à $(x+1)^2$.

Question 11:

On a: $$F(X)=\frac{X^4}{(X-1)(X^2-1)}$$

$$=\frac{X^4}{(X-1)^2(X+1)}$$

Et on a:

$$(X-1)^2(X+1)=X^3-X^2-X+1$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & X^4 & X^3-X^2-X+1 \\
- & X^4-X^3-X^2+X & \hline \\
\hline
 & X^3+X^2-X & X+1 \\
- & X^3-X^2-X+1 & \\
\hline
 & 2X^2-1 &
\end{array}
$$

Donc:

$$X^4=\left(X^3-X^2-X+1\right)(X+1\,)+2X^2-1$$

$$=(X-1)^2(X+1)(X+1\,)+2X^2-1$$

Donc:

$$F(X) = X + 1 + \frac{2X^2 - 1}{(X-1)^2(X+1)}$$

On a:

$$\frac{2X^2 - 1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} \quad (*)$$

$$(*)\times (X-1)^2 \Longrightarrow \quad \frac{2X^2-1}{X+1} = \frac{a(X-1)^2}{X+1} + b(X-1) + c$$

$$X = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$(*)\times (X+1) \Longrightarrow \quad \frac{2X^2-1}{(X-1)^2} = a + \frac{b(X+1)}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

$$X = -1 \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$$

Donc:

$$\frac{2X^2 - 1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{b}{X-1} + \frac{1}{2(X-1)^2}$$

$$X = 0 \Longrightarrow b = \frac{7}{4}$$

Donc:

$$F(X) = X + 1 + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{7}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2}$$

Question 12:

On a:

$$det(M - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{1+1} \times (-\lambda) \times [-\lambda \times (1-\lambda) - 1] + (-1)^{3+1} \times 1 \times \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \times \left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \;\; ou \;\; \lambda = -1 \;\; ou \;\; \lambda = 2$$

Donc les valeurs propres de la matrice M sont: 0 , -1 et 2.

Question 13:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par: $f_n(x) = x(1+x)^n$

On a f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a: $f'_n(x) = (1+x)^n + x \times n \times (1+x)^{n-1}$

Donc: $$f'_n(1) = n2^{n-1} + 2^n$$

D'autre part, on a:

$$f_n(x) = x \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1}$$

D'où:

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k x^k$$

D'où:

$$f'_n(1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k$$

$$= E$$

Donc:

$$E = n2^{n-1} + 2^n$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Question 14:

On a:

$$f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$$

Donc:

$$f'(\sqrt{2}) = g'(\sqrt{2}) e^{g(\sqrt{2})}$$

Calculons:

$$g(\sqrt{2})$$

On a:

$$g(\sqrt{2}) = \int_2^2 \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$$

D'où:

$$g(\sqrt{2}) = 0$$

Calculons:

$$g'(\sqrt{2})$$

On a:

$$g'(x) = 2x \times \frac{e^{-x^2}}{1+x^4}$$

Donc:

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-2}$$

Donc:

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-2} \times e^{0}$$

Donc:

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-2}$$

Question 15:

On a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-3f(2x)+f(4x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)-6f'(2x)+4f'(4x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2f''(x)-12f''(2x)+16f''(4x)}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} f''(x)-6f''(2x)+8f''(4x)$$

$$= f''(0)-6f''(0)+8f''(0)$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Car:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} x = 0 \\ \lim_{x\to 0} 2x = 0 \\ \lim_{x\to 0} 4x = 0 \end{cases}$$

Et f'' est continue en 0

On a:

$$f''(0) = 5$$

Donc:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-3f(2x)+f(4x)}{x^2} = 15$$